Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.43+517.5

В. М. Горбачук

Про розв'язність диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі в класі аналітичних вектор-функцій

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)

Для певного класу неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних комплексних чисел розв'язується проблема існування і єдиності аналітичного розв'язку.

Розглядається рівняння вигляду

$$Ay^{(m)}(\lambda) - y(\lambda) = f(\lambda), \tag{1}$$

де A — лінійний неперервний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ над деяким полем K з нормою $|\cdot|_K$, а $f(\lambda)$ — $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція, аналітична в області $\{\lambda\colon |\lambda|_K < r\}$, $0 < r \leqslant \infty$. Відомо [1, гл. 6, лема 2.1], що у випадку, коли $m = 1$, K — поле комплексних чисел $\mathbb{C}$, оператор A має обернений A^{-1}, заданий на всьому просторі $\mathfrak{B}$, а $f(\lambda)$ — ціла функція мінімального експоненціального типу (тобто $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, c_\varepsilon > 0\colon \|f(\lambda)\| \leqslant c_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}$), рівняння (1) має єдиний цілий розв'язок мінімального експоненціального типу. Цей результат був поширений у [2] на випадок довільного обмеженого A. Зокрема встановлено, що якщо A — квазінільпотентний оператор (спектральний радіус дорівнює нулеві), а $f(\lambda)$ — ціла вектор-функція експоненціального типу, то рівняння (1) однозначно розв'язне в класі вектор-функцій експоненціального типу, тип яких не перевищує тип $f(\lambda)$. Показано також, що за умови $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} = 0$ для будь-якої вектор-функції $f(\lambda)$, аналітичної в крузі $\{\lambda\colon |\lambda| \leqslant r\}$, існує єдиний розв'язок рівняння (1), аналітичний у цьому ж самому крузі.

Мета роботи — дослідити рівняння (1) на розв'язність (1) у випадку, коли K — поле комплексних p-адичних чисел.

1. Покладемо $K = \Omega$, де $\Omega = \Omega_p$ — поповнення алгебраїчного замикання поля Q_p p-адичних чисел (p — просте число), яке, у свою чергу, є поповненням поля Q раціональних чисел відносно p-адичної норми

$$|a|_p = p^{-\nu} \qquad \text{для} \qquad a = p^\nu \frac{n}{m} \in Q,$$

де цілі числа n і m взаємно прості з p (деталі щодо поля Ω див. у [3–7]). Припустимо також, що $\mathfrak{B}$ — банахів простір над Ω з нормою $\|\cdot\|\colon \mathfrak{B} \mapsto \mathbb{R}_+$, яка має такі властивості:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\forall\,\lambda \in \Omega$, $\forall\,x \in \mathfrak{B}\colon \|\lambda x\| = |\lambda|_p\|x\|$;
3) $\forall\,x,\ y \in \mathfrak{B}\colon \|x + y\| \leqslant \max\{\|x\|, \|y\|\}$;
4) простір $\mathfrak{B}$ є повним по нормі $\|\cdot\|$.

Розглянемо тепер степеневий ряд

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n, \qquad c_n \in \mathfrak{B}, \qquad \lambda \in \Omega. \tag{2}$$

Цей ряд збігається в точці λ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \|c_n\||\lambda|_p^n = 0.$$

Під його радіусом збіжності зазвичай розуміється число

$$r = r(y) = \left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|c_n\|}\right)^{-1}.$$

Якщо $r > 0$, то ряд (2) визначає $\mathfrak{B}$-значну вектор-функцію (або просто вектор-функцію) у відкритому крузі $\mathcal{D}(0, r^-) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < r\}$. Його збіжність є абсолютною і рівномірною в довільному замкненому крузі $\mathcal{D}(0, \tau) = \{\lambda \in \Omega\colon |\lambda|_p \leqslant \tau\}$, $\tau \in (0, r)$.

Для числа $\alpha > 0$ позначимо через $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{B})$ множину всіх вектор-функцій $y(\lambda)$ вигляду (2), для яких

$$r(y) \geqslant \alpha \qquad \text{і} \qquad \lim_{n\to\infty} \|c_n\|\alpha^n = 0.$$

Лінійна множина $\mathfrak{A}_\alpha$ з нормою

$$\|y\|_\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}_0=\{0\}\bigcup\mathbb{N}} \|c_n\|\alpha^n$$

утворює банахів простір над полем Ω. Оскільки

$$\|y\|_{\alpha_2} \geqslant \|y\|_{\alpha_1} \qquad \text{при} \qquad \alpha_1 < \alpha_2, \qquad y \in \mathfrak{A}_{\alpha_2},$$

вкладення

$$\mathfrak{A}_{\alpha_2} \subseteq \mathfrak{A}_{\alpha_1},$$

індуковане звуженням на область визначення, є неперервним. Простір

$$\mathfrak{A}_{r^-} = \mathfrak{A}_{r^-}(\mathfrak{B}) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\uparrow r} \mathfrak{A}_\alpha$$

складається з вектор-функцій, аналітичних в $\mathcal{D}(0, r^-)$. Збіжність послідовності $\{y_n \in \mathfrak{A}_{r^-}\}_{n\in\mathbb{N}}$ до вектор-функції y у просторі $\mathfrak{A}_{r^-}$ означає, що

$$\forall\,\alpha \in (0, r)\colon \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\alpha = 0.$$

2. Повернемось до рівняння (1) і припустимо, що A — неперервний оператор у $\mathfrak{B}$, а $f \in \mathfrak{A}_{r-}$ з деяким $r > 0$. Під розв'язком цього рівняння в крузі $\mathcal{D}(0, r-)$ розумітимемо вектор-функцію $y(\lambda)\colon \mathcal{D}(0, r^-) \mapsto \mathfrak{B}$ з $\mathfrak{A}_{r-}$, що задовольняє (1) у крузі $\mathcal{D}(0, r^-)$.

Позначимо через s величину

$$s = s(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Якщо $\mathfrak{B}$ — банахів простір над полем $\mathbb{C}$, то s є не що інше, як спектральний радіус оператора A.

Теорема 1. *Нехай A — неперервний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ над полем Ω, а вектор-функція*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n, \qquad b_n \in \mathfrak{B}, \tag{3}$$

належить до $\mathfrak{A}_{r-}$ з $r > s^{1/m}$. Тоді в класі $\mathfrak{A}_{r-}$ існує єдиний розв'язок $y(\lambda)$ рівняння (1)*. Цей розв'язок задається формулою*

$$y(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^n f^{(nm)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \tag{4}$$

де

$$c_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+n)!}{n!} A^k b_{mk+n}, \tag{5}$$

причому має місце неперервна залежність розв'язку від правої частини рівняння, тобто якщо послідовність $\{f_n \in \mathfrak{A}_{r-}\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до нуля в просторі $\mathfrak{A}_{r-}$, то й послідовність $\{y_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ відповідних розв'язків з простору $\mathfrak{A}_{r-}$ збігається до нуля в цьому ж самому просторі.

Позначимо через $\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}_\infty(\mathfrak{B})$ простір усіх цілих вектор-функцій із значеннями в $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{A}_\infty = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{A}_\alpha.$$

Теорема 2. *Нехай у рівнянні* (1) *$f(\lambda)$ — ціла вектор-функція. Тоді в класі $\mathfrak{A}_\infty$ існує єдиний розв'язок $y(\lambda)$ цього рівняння. Розв'язок $y(\lambda)$ неперервно залежить від $f(\lambda)$ в топології простору $\mathfrak{A}_\infty$.*

Наслідок 1. *Якщо $f(\lambda)$ — многочлен, то рівняння* (1) *має єдиний розв'язок $y(\lambda)$ у класі многочленів. Більше того, степені многочленів $f(\lambda)$ та $y(\lambda)$ збігаються.*

3. Вектор-функція $y(\lambda)$ називається локально аналітичною в нулі, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що $y \in \mathfrak{A}_\alpha$. Простір $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(\mathfrak{B})$ усіх таких функцій наділяється топологією індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{A}_\alpha$:

$$\mathfrak{A}_0 = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{A}_\alpha.$$

Послідовність $\{y_n \in \mathfrak{A}_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в $\mathfrak{A}_0$, якщо всі вектор-функції $y_n(\lambda)$ належать до $\mathfrak{A}_\alpha$ з деяким α і ця послідовність збігається у просторі $\mathfrak{A}_\alpha$.

Нехай $f \in \mathfrak{A}_0$. Природно постає питання, за яких додаткових умов на вектор-функцію $f(\lambda)$ і оператор A існує локально аналітичний в нулі розв'язок рівняння (1) і як описати усі такі розв'язки у випадку неєдиності. Щоб відповісти на це запитання, введемо простір цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора (див. [8]).

Отже, нехай B — довільний замкнений оператор в $\mathfrak{B}$. Для числа $\beta > 0$ покладемо

$$E_\beta(B) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(B^n) \mid \exists c = c(x) > 0, \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \colon \|B^k x\| \leqslant c\beta^k \right\}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора). Лінійна множина $E_\beta(B)$ утворює банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{E_\beta} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|B^n x\|}{\beta^n}.$$

Елементи простору

$$E(B) = \operatorname{ind}\lim_{\beta\to\infty} E_\beta(B) = \bigcup_{\beta>0} E_\beta(B)$$

називаються цілими векторами експоненціального типу оператора B. Під типом $\sigma(x) = \sigma(x, B)$ вектора $x \in E(B)$ розуміється число

$$\sigma(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \|B^n x\|^{1/n}.$$

У випадку, коли $\mathcal{D}(B) = \mathfrak{B}$, простір $E(B)$ збігається з $\mathfrak{B}$ і

$$\forall\, x \in \mathfrak{B} \colon \sigma(x) \leqslant \|B\|.$$

Якщо оператор B має обмежений обернений B^{-1}, визначений на всьому просторі $\mathfrak{B}$, і $s(B^{-1}) = 0$, то $E(B) = \{0\}$.

Теорема 3. *Нехай A — неперервний оператор в $\mathfrak{B}$, для якого нуль не є власним значенням, і $f \in \mathfrak{A}_{r-}$ з $r > s^{1/m}(A)$. Тоді існує локально аналітичний розв'язок рівняння* (1) *і цей розв'язок є єдиним тоді і тільки тоді, коли $E(A^{-1}) = \{0\}$. Якщо ж $E(A^{-1}) \neq \{0\}$, то будь-який локально аналітичний у нулі розв'язок $y(\lambda)$ має вигляд*

$$y(\lambda) = z(\lambda) + \sum_{k=0}^{m-1} F_k(\lambda, A^{-1}) x_k, \qquad x_k \in E(A^{-1}),$$

де

$$F_k(\lambda, A^{-1}) x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{-n} x}{(mn+k)!} \lambda^{nm+k}, \tag{6}$$

а $z(\lambda)$ — єдиний розв'язок рівняння (1) *з класу $\mathfrak{A}_{r-}$, який визначається теоремою 1 за допомогою* (4), (5).

Зазначимо (див. [9]), що радіус збіжності $r(F_k(\cdot, A^{-1})x)$ ряду (6) не залежить від k і обчислюється за формулою

$$r(F_k(\cdot, A^{-1})x) = \sigma^{-1/m}(x) p^{-1/(p-1)}$$

(тут $\sigma(x) = \sigma(x, A^{-1})$ — тип вектора $x \in E(A^{-1})$).

Наслідок 2. *Нехай* $f \in \mathfrak{A}_{r^-}$ *з* $r > s^{1/m}(A)$. *Покладемо*

$$f_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k,$$

тобто $f_n(\lambda)$ — *частинна сума ряду* (3) *для* $f(\lambda)$. *Тоді розв'язок* $y_n(\lambda)$ *рівняння* (1) *з правою частиною* $f_n(\lambda)$ *замість* $f(\lambda)$ *є многочленом, причому при* $n \to \infty$ *послідовність* $y_n(\lambda)$ *збігається у просторі* $\mathfrak{A}_{r^-}$ *до розв'язку* $y(\lambda)$ *рівняння* (1).

4. Розглянемо задачу Коші

$$\begin{cases} Ay^{(m)}(\lambda) - y(\lambda) = f(\lambda), \\ y^{(k)}(0) = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{7}$$

яка полягає у відшуканні локально аналітичної в нулі вектор-функції

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n,$$

що задовольняє (7). Як випливає з теореми 3, ця задача не завжди розв'язна. Тому закономірним є питання, за яких умов на $f(\lambda)$ і початкові дані $\{y_k\}_{k=0}^{m-1}$ розглядувана проблема має розв'язок і, якщо це так, чи є цей розв'язок єдиним. Відповідь дає така теорема.

Теорема 4. *Нехай* A — *неперервний оператор в* $\mathfrak{B}$, *для якого точка 0 не є власним значенням. Тоді за умови, що* $f \in \mathfrak{A}_{r^-}$ *з деяким* $r > s^{1/m}(A)$, *задача Коші* (7) *однозначно розв'язна в* $\mathfrak{A}_0$ *тоді і тільки тоді, коли* $y_k - k!a_k \in E(A^{-1})$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, *де*

$$a_k = -\frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} A^n f^{(nm+k)}(0), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Наслідок 3. *Нехай* $s = s(A) = 0$. *Тоді задача Коші* (7) *має єдиний розв'язок* $y(\lambda)$ *в* $\mathfrak{A}_0$ *тоді і тільки тоді, коли* $y_k = k!a_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Наслідок 4. *Якщо оператор* A^{-1} *є обмеженим, то задача* (7) *однозначно розв'язна в* $\mathfrak{A}_0$ *для будь-яких* $y_k \in \mathfrak{B}$.

5. Покажемо, як наведені результати можуть бути застосовані до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Нехай $\mathfrak{B}$ — простір функцій $\varphi(x)$ із значеннями в Ω, аналітичних на n-вимірній кулі

$$\mathcal{D}_n(0, \rho) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n \colon \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|_p^2 \right)^{1/2} \leqslant \rho \right\},$$

тобто функцій $\varphi(x)$ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha x^\alpha, \qquad \varphi_\alpha \in \Omega,$$

для яких

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} |\varphi_\alpha|_p \rho^{|\alpha|} = 0,$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Простір $\mathfrak{B}$ є банаховим над полем Ω відносно норми

$$\|\varphi\| = \sup_\alpha |\varphi|_p \rho^{|\alpha|}.$$

Диференціальні оператори

$$\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_\alpha \alpha_i \varphi_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_i - 1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

є обмеженими в $\mathfrak{B}$, і

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\| = \frac{1}{\rho}.$$

Оператор множення

$$T\colon \varphi \mapsto \theta\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{B},$$

на елемент $\theta \in \mathfrak{B}$ також обмежений, і

$$\|T\| = \|\theta\|.$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \sum_{|\beta|=0}^{q} a_\beta(x) D^\beta u(t,x) - u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}(0, r^-) \times \mathcal{D}_n(0, \rho), \quad f \in \mathfrak{A}_{r^-}(\mathfrak{B}),$$

де $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $a_\beta \in \mathfrak{B}$, $D^\beta = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}}$. Це рівняння можна подати у вигляді (1), якщо за A взяти оператор

$$\varphi \mapsto A\varphi = \sum_{|\beta|=0}^{q} a_\beta D^\beta \varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{B}.$$

Із співвідношення

$$\left\| \sum_{|\beta|=0}^{q} a_\beta D^\beta \varphi \right\| \leqslant \max_\beta \|a_\beta D^\beta \varphi\| \leqslant \max_\beta \|a_\beta\| \|D^\beta \varphi\| \leqslant \max_\beta \{\rho^{-|\beta|} \|a_\beta\|\} \|\varphi\|$$

випливає, що оператор A обмежений в $\mathfrak{B}$ і

$$\|A\| \leqslant \max_\beta \{\rho^{-|\beta|} \|a_\beta\|\}.$$

Згідно з теоремою 1, при $r > \gamma^{1/m}$, де $\gamma = \max\limits_\beta \{\rho^{-|\beta|} \|a_\beta\|\}$, існує єдиний розв'язок рівняння (8), аналітичний у $\mathcal{D}(0, r^-) \times \mathcal{D}_n(0, \rho)$.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1970. – 534 с.
2. *Gefter S., Stulova T.* On holomorphic solutions of some implicit linear differential equation in a Banach Space // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – **191**. – P. 323–332.
3. *Коблиц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. – Москва: Мир, 1982. – 192 с.
4. *Dwork B., Gerotto G., Sullivan F. J.* An introduction to G-functions. – Princeton: Princeton University Press, 1994. – 323 p.
5. *Schikhof W. H.* Ultrametric calculus, an introduction to p-adic analysis. – London: Cambridge University Press, 1984. – 306 p.
6. *Хренников А. Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. – Москва: Физматлит, 2003. – 216 с.
7. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-Адический анализ и математическая физика. – Москва: Физматлит, ВО "Наука", 1994. – 352 с.
8. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791–793.
9. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* On the Cauchy problem for differential equations in a Banach space over the field of p-adic numbers // Proc. Steklov Inst. Math. – 2004. – **245**. – P. 91–97.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 16.03.2010*

V. M. Gorbachuk

On the solvability of differential equations in a non-Archimedean Banach space in a class of holomorphic vector functions

For a certain class of inhomogeneous differential equations in a Banach space over the field of complex p-adic numbers, the problem of existence and uniqueness of a holomorphic solution is considered.