УДК 517.96

В. В. Городецький, І. С. Тупкало

Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Встановлюється розв'язність задачі Коші для сингулярного еволюційного рівняння з псевдобесселевим оператором, побудованим за змінним символом, у класі неперервних обмежених початкових функцій.

Широкий клас операторів формально можна подати у вигляді $A = J^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)J_{x\to\sigma}]$, де J — деяке інтегральне перетворення, $a(t,x;\sigma)$ — функція (символ) оператора, яка задовольняє певні умови; якщо $a(t,x;\sigma) \equiv a(\sigma)$, то символ називається сталим. На сьогодні найбільш повно досліджено випадок, коли $J = F$, де F — перетворення Фур'є. До вказаного класу належать оператори диференціювання, дробового диференціювання та інтегрування, інтегральні оператори типу згортки та інші.

При $J = F_B$, де F_B — перетворення Бесселя, еволюційні рівняння вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^+_n, \tag{1}$$

досліджувалися у випадку, коли символ $a(t,x;\sigma)$, як функція аргументу σ, є поліномом, який задовольняє певні умови (умови параболічності). Рівняння (1) при цьому називається сингулярним параболічним рівнянням. У простішому випадку, коли $a(t,x;\sigma) \equiv -\sigma^2$, $\sigma \in \in (0,\infty)$, оператор $A = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[\sigma^2 F_{B_{x\to\sigma}}]$ збігається з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, — фіксований параметр, який вироджується за просторовою змінною, а рівняння (1) з таким оператором вироджується на межі області.

Класична теорія задачі Коші для сингулярних параболічних рівнянь побудована в працях М. І. Матійчука, В. В. Крехівського, С. Д. Івасишена, В. П. Лавренчука, І. І. Веренич та ін. Задача Коші для сингулярних параболічних рівнянь у класах розподілів та ультрарозподілів вивчалася Я. І. Житомирським, В. В. Городецьким, О. В. Мартинюк, В. А. Літовченком та ін. Для рівнянь вигляду (1) з оператором A, побудованим за змінним, аналітичним по аргументу σ символом, задача Коші не вивчалася. У цій роботі встановлюється розв'язність такої задачі з обмеженою неперервною на $\mathbb{R}^n$ початковою функцією, досліджуються структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші, обгрунтовується зображення оператора A у вигляді ряду

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(t,x)(-1)^{|k|}B^k,$$

де B — n-вимірний оператор Бесселя.

Нехай n — фіксоване натуральне число, $i \in \{1,\dots,n\}$, M_i, Ω_i: $\mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — диференційовні, парні на $\mathbb{R}$ функції, зростаючі та опуклі на $[0,+\infty)$, причому $M_i(0) = \Omega_i(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M_i(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Omega_i(x) = +\infty$. За допомогою функцій M_i та Ω_i Б. Л. Гуревич [1] увів простори $W_M(\mathbb{R}^n)$, $W^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$ та $W_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$, названі ним просторами типу W. Зокрема, символом $W_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n) \equiv W_{M_1,\ldots,M_n}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}$ позначається сукупність цілих функцій $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists\, c > 0\ \exists\, a_j > 0\ \exists\, b_j > 0,\ j \in \{1,\ldots,n\},\ \forall\, z = x + iy \equiv (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n :$$

$$|\varphi(z)| \leqslant c \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(-M_j(a_j x_j) + \Omega_j(b_j y_j))\right\}.$$

Послідовність функцій $\{\varphi_m(z), m \geqslant 1\}$ називається збіжною до нуля в просторі $W_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$, якщо вона: 1) рівномірно збігається до нуля в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}^n$; 2) обмежена в $W_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$.

Символом $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$ позначимо сукупність усіх цілих парних за кожною змінною функцій з простору $W_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним, а його елементи — основними функціями. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$, які допускають аналітичне продовження в $\mathbb{C}^n$ і, як функції комплексних змінних, є елементами простору $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$, позначимо символом $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$.

У просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$ визначені і є неперервними оператори $A_j = z_j^{-1}\partial/\partial z_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, а також оператор $A := A_1 \cdots A_n$ [2]. Звідси випливає, що в просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{C}^n)$ визначені і є неперервними оператори Бесселя

$$B_{\nu_j,z_j} := \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \frac{2\nu_j + 1}{z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}, \qquad \nu_j > -\frac{1}{2}, \qquad j \in \{1,\ldots,n\},$$

а також оператор $B_{\nu_1,z_1} \cdots B_{\nu_n,z_n}$. У просторі ж $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$ визначений і є неперервним оператор Бесселя B_{ν_j}, який відповідає змінній x_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, а також відповідний оператор $B_{\nu_1} \cdots B_{\nu_n}$.

Перетворення Бесселя в просторі $\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$ визначаються так [2]:

$$\psi(\sigma) = F_B[\varphi][\sigma] := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x) j_{\nu_1}(\sigma_1 x_1) \cdots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n) x_1^{2\nu_1+1} \cdots x_n^{2\nu_n+1} dx_1 \cdots dx_n,$$

$x = (x_1,\ldots,x_n)$, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0,\ldots,x_n > 0\}$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$; $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{W}{}_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n) \equiv \overset{\circ}{W}{}_{M_1^1,\ldots,M_n^1}^{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_n^1}$, де Ω_j^1 та M_j^1 — функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M_j та Ω_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$ [3], при цьому

$$\varphi(x) = F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \psi(\sigma) j_{\nu_1}(\sigma_1 x_1) \cdots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n) \sigma_1^{2\nu_1+1} \cdots \sigma_n^{2\nu_n+1} d\sigma_1 \cdots d\sigma_n;$$

тут j_{ν_i}, $i \in \{1,\ldots,n\}$, — нормована функція Бесселя; $c_\nu = c_{\nu_1} \cdots c_{\nu_n}$, $c_{\nu_i} = (2^{2\nu_i}\Gamma^2(\nu_i + 1))^{-1}$, $\nu_i > -1/2$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, — фіксовані параметри; $F_B\left[\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R}^n)\right] = \overset{\circ}{W}{}_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n)$, оператор F_B є лінійним і неперервним.

У просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)$ визначений і є неперервним оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ [2]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \varphi\Big(\sqrt{x_1^2+\xi_1^2-2x_1\xi_1\cos\omega_1}, \ldots, \sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\omega_n}\Big) \times$$

$$\times \sin^{2\nu_1}\omega_1 \cdots \sin^{2\nu_n}\omega_n d\omega_1 \cdots d\omega_n, \qquad b_\nu = b_{\nu_1}\cdots b_{\nu_n},$$

$$b_{\nu_i} = \frac{\Gamma(\nu_i+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu_i+1/2)}, \qquad \nu_i > -\frac{1}{2}, \qquad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Перейдемо до побудови оператора Бесселя за змінним символом. Нехай $a_1(t,x_1;\sigma_1), \ldots, a_n(t,x_n;\sigma_n)$ — функції, задані на $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, парні за змінними x_j, σ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$, які задовольняють умови:

1) при фіксованих x_j, σ_j функція $a_j(t,x_j;\sigma_j)$ є неперервною функцією аргументу t на відрізку $[0,T]$; $a_j(t,x_j;\sigma_j)$ при фіксованих t, σ_j — неперервна, обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргументу x_j;

2) при фіксованих t, x_j функція $a_j(t,x_j;\sigma_j)$ як функція змінної σ_j допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, при цьому

$$\forall\,\varepsilon>0 \qquad \exists\, c_{\varepsilon j}>0 \qquad \forall\,\sigma_j+i\tau_j\in\mathbb{C}\colon\ |a_j(t,x_j;\sigma_j+i\tau_j)| \leqslant c_{\varepsilon j}\exp\{M_j(\varepsilon\sigma_j)+\Omega(\varepsilon\tau_j)\},$$

$$\forall\,(t,x_j)\in\Pi_T := [0,T]\times\mathbb{R},$$

$$\exists\, c_{0j}>0 \qquad \exists\,\widetilde{a}_j>0 \qquad \exists\, b_j>0\colon\ |\exp\{a_j(t,x_j;\sigma_j+i\tau_j)\}| \leqslant$$

$$\leqslant c_{0j}\exp\{-M_j(\widetilde{a}_j\sigma_j)+\Omega_j(b_j\tau_j)\}, \qquad \sigma_j+i\tau_j\in\mathbb{C}, \qquad \forall\,(t,x_j)\in\Pi_T.$$

Тоді в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}^n)$ визначений, є лінійним і неперервним оператор

$$B = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[a_1(t,x_1;\sigma_1)\ldots a_n(t,x_n;\sigma_n)F_{B_{x\to\sigma}}],$$

який формально можна віднести до класу псевдодиференціальних операторів, побудованих за змінним символом.

Нехай розклад функції $a_j(t,x_j;\sigma_j)$ за змінною σ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$, в ряд Тейлора має вигляд

$$a_j(t,x_j;\sigma_j) = \sum_{k_j=0}^{\infty} c_{2k_j}(t,x_j)\sigma_j^{2k_j}.$$

Правильним є таке твердження.

Теорема 1. *Оператор B зображується у вигляді*

$$B = \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} c_{2k_1}(t,x_1)\cdots c_{2k_n}(t,x_n)(-1)^{|k|}B_{\nu_1}^{k_1}\cdots B_{\nu_n}^{k_n} \equiv \sum_{|k|=0}^{\infty} c_{2k}(t,x)(-1)^{|k|}B^k,$$

$$c_{2k}(t,x) = \prod_{j=1}^{n} c_{2k_j}(t,x_j), |k| = k_1+\cdots+k_n,$$

B_{ν_j} *— оператор Бесселя порядку $\nu_j > -1/2$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.*

Надалі оператор B називатимемо оператором Бесселя нескінченного порядку.

Нехай

$$C_{M^1}(\mathbb{R}^n) \equiv C_{M_1^1,\ldots,M_n^1} := \Bigg\{\varphi \in C(\mathbb{R}^n)\colon\ \ \exists\, c > 0\ \exists\, \widetilde{\widetilde{a}}_j > 0,\ j \in \{1,\ldots,n\}:$$

$$\forall\, x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ \ |\varphi(x)| \leqslant c \exp\Bigg\{-\sum_{j=1}^{n} M_j^1(\widetilde{\widetilde{a}}_j x_j)\Bigg\}\Bigg\},$$

де M_j^1 — функція, двоїста за Юнгом до функції Ω_j, сталі c, $\widetilde{a}_j > 0$ залежать лише від функції φ, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

У смузі $\Pi_{T,\tau} := \{(t,x)\colon \tau < t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n\}$, $\tau \geqslant 0$, розглянемо задачу про відшукання розв'язку еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Bu(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{T,\tau}, \tag{2}$$

який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \tag{3}$$

де $\varphi \in \mathbb{C}_{M^1}(\mathbb{R}^n)$; при цьому (3) розуміємо в тому сенсі, що $\lim\limits_{t\to\tau+0} u(t,x) = \varphi(x)$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}^n$. Введемо позначення: $L := \partial/\partial t - B$.

Під фундаментальним розв'язком задачі Коші (2), (3) розумітимемо функцію $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x) \in \Pi_{T,\tau}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, яка має властивості:

1) $L\Gamma(t,x;\tau,\xi) = 0$, тобто Γ як функція t, x при фіксованих τ, ξ є розв'язком рівняння (2);

2) $\lim\limits_{t\to\tau+0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi_1^{2\nu_1+1}\cdots\xi_n^{2\nu_n+1}d\xi_1\cdots d\xi_n = \varphi(x)$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}^n$ для довільної функції $\varphi \in C_{M^1}(\mathbb{R}^n)$.

Для побудови функції Γ використаємо метод Леві (метод параметрикса), який полягає в тому, що функцію Γ шукаємо у вигляді суми $T_x^\xi Z + W$, де $T_x^\xi Z$ — головний доданок, а W — допоміжний. За головний доданок беремо фундаментальний розв'язок рівняння (2), в який входить оператор із символом $a_1(\tau,\xi_1;\sigma_1)$, $\ldots$, $a_n(\tau,\xi_n;\sigma_n)$ з фіксованою точкою $(\tau,\xi) = (\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Другий доданок шукаємо у вигляді інтегрального оператора з ядром, щільність якого визначається з деякого інтегрального рівняння.

Отже,

$$Z(t-\tau,x;\tau,\xi) = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}\Bigg[\exp\Bigg\{(t-\tau)\prod_{j=1}^{n} a_j(\tau,\xi_j;\sigma_j)\Bigg\}\Bigg].$$

Основні властивості функції Z наведемо в таких твердженнях.

Лема 1. *При фіксованих t, τ, $t > \tau$, ξ функція $Z(t-\tau,z;\tau,\xi)$ як функція змінної $z = (x_1 + iy_1,\ldots,x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ є елементом простору $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{C}^n)$, при цьому*

$$\exists\, d\colon 0\ \exists\, b_{1,j} \in (0,\widetilde{a}_j)\ \exists\, b_{2,j} > b_j\ \forall\, z \in \mathbb{C}^n\colon\ \ |Z(t-\tau,z;\tau,\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant d(t-\tau)^{-\mu}\exp\Bigg\{(t-\tau)\sum_{j=1}^{n}\bigg(-M_j^1\bigg(\frac{x_j}{b_{1,j}(t-\tau)}\bigg) + \Omega_j^1\bigg(\frac{y_j}{b_{2,j}(t-\tau)}\bigg)\bigg)\Bigg\},$$

де $\widetilde{a}_j$, $b_j > 0$ — *параметри з умови 2, яку задовольняє функція-символ* $a_j(t, x_j; \sigma_j)$, $j \in \in \{1, \ldots, n\}$, $0 < \mu < 1$, *сталі* d, $b_{1,j}$, $b_{2,j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *не залежать від* τ, ξ.

Лема 2. *Для довільної функції* $\varphi \in C_{M^1}(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T_x^\xi Z(t-\tau, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\xi_1^{2\nu_1+1}\cdots\xi_n^{2\nu_n+1}d\xi_1\cdots d\xi_n \to \varphi(x) \tag{4}$$

при $t \to \tau + 0$ *у кожній точці* $x \in \mathbb{R}^n$.

Лема 3. *Для функції* $LT_x^\xi Z(t-\tau, x; \tau, \xi)$ *правильною є нерівність*

$$|LT_x^\xi Z(t-\tau, x; \tau, \xi)| \leqslant c_0(t-\tau)^{-\lambda}\exp\left\{-(t-\tau)\sum_{j=1}^n M_j^1\left(\frac{x_j-\xi_j}{b_{0,j}(t-\tau)}\right)\right\}.$$

Перейдемо до побудови фундаментального розв'язку рівняння (2). Цей розв'язок шукаємо у вигляді

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = T_x^\xi Z(t-\tau, x; \tau, \xi) + W(t, x; \tau, \xi),$$

де

$$W(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_\tau^t d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T_x^\xi Z(t-\mu, x; \mu, \eta)\Phi(\mu, \eta; \tau, \xi)\eta^{2\nu+1}d\eta,$$

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \qquad \eta^{2\nu+1} = \eta_1^{2\nu_1+1}\cdots\eta_n^{2\nu_n+1}.$$

Тут Z — визначена раніше функція, $\Phi(t, x; \tau, \xi)$ підберемо так, щоб $\Gamma(t, x; \tau, \xi)$ як функція t, x задовольняла рівняння (2). Застосувавши до Γ оператор L, знайдемо, що це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = K(t-\tau, x; \tau, \xi) + \int\limits_\tau^t d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} K(t-\mu, x; \mu, \eta)\Phi(\mu, \eta; \tau, \xi)\eta^{2\nu+1}d\eta, \tag{5}$$

де

$$K(t-\tau, x; \tau, \xi) = -LT_x^\xi Z(t-\tau, x; \tau, \xi).$$

Ряд

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \sum_{m=1}^\infty K_m(t-\tau, x; \tau, \xi), \qquad K_1 = K,$$

$$K_m(t-\tau, x; \tau, \xi) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} K(t-\beta, x; \beta, \eta)K_{m-1}(\beta-\tau, \eta; \tau, \xi)\eta^{2\nu+1}d\eta$$

є розв'язком інтегрального рівняння (5). Вказаний ряд збігається абсолютно і рівномірно при $0 < \delta_0 \leqslant t - \tau \leqslant T$; для обгрунтування збіжності цього ряду попередньою здійснюємо оцінку повторних ядер K_m. У результаті отримаємо оцінки функцій Φ та W:

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \leqslant d_0(t-\tau)^{-\lambda} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{2}\sum_{j=1}^{m} M_j^1\left(\frac{x_j-\xi_j}{b_{0,j}(t-\tau)}\right)\right\},$$
$$|W(t,x;\tau,\xi)| \leqslant d_1(t-\tau)^{-\lambda} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4}\sum_{j=1}^{m} M_j^1\left(\frac{x_j-\xi_j}{b_{0,j}(t-\tau)}\right)\right\}, \qquad 0<\lambda<1. \tag{6}$$

Із оцінки (6) випливає граничне співвідношення

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} W(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = 0, \qquad \varphi\in C_{M^1}(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

Із співвідношення (4) при $\tau = 0$ дістаємо також, що

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T_x^{\xi} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \varphi(x), \qquad \varphi\in C_{M^1}(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

у кожній точці $x\in\mathbb{R}^n$. На підставі (7), (8) твердимо, що функція $\Gamma = T_x^{\xi}Z + W$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (2). Основний результат сформулюємо у вигляді такого твердження.

Теорема 2. *Задача Коші* (2), (3) *розв'язна у вказаному сенсі. Розв'язок цієї задачі зображується формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi,$$

$u(t,\cdot)\in C_{M^1}(\mathbb{R}^n)$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
2. *Городецький В. В., Мартинюк О. В.* Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування // Доп. НАН України. – 2003. – № 6. – С. 7–12.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1958. – 274 с.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 24.03.2010

V. V. Gorodets'kyi, I. S. Tupkalo

The Cauchy problem for the singular evolution equations

The solvability of the Cauchy problem for singularly evolution equations with a pseudo-Bessel operator constructed by a variable symbol in a class of continuous bounded initial functions is established.