

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова,  
Н. И. Чернов, А. В. Панкратов

## Полный класс $\Phi$ -функций для базовых двумерных $\varphi$ -объектов

*Розглядається сім'я  $\mathfrak{S}$  базових двовимірних  $\varphi$ -об'єктів. Допускаються афінні відображення  $\varphi$ -об'єктів типу трансляції й повороту у двовимірному арифметичному евклідовому просторі. Будується повний клас  $\Phi$ -функцій для об'єктів сім'ї  $\mathfrak{S}$  з використанням тільки нескінченно диференційованих функцій. Наведено теорему про існування вільної від радикалів  $\Phi$ -функції для пари довільних  $\varphi$ -об'єктів, межі яких формуються об'єднанням дуг кіл і відрізків прямих.*

Фундаментальной основой математического моделирования оптимизационных задач упаковки и раскроя [1] является аналитическое описание отношений включения, пересечения, касания геометрических объектов. В статье [2] приводится достаточно полный обзор и сравнение современных методов моделирования отношений двумерных геометрических объектов. Наиболее эффективным средством является метод  $\Phi$ -функций [3–6].

Пусть  $A \subset R^2$  и  $B \subset R^2$  — замкнутые  $\varphi$ -объекты [3, 4], граница которых задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, здесь  $R^2$  — двумерное арифметическое евклидово пространство. Допускаются аффинные отображения трансляции и поворота множеств  $A$  и  $B$  в пространстве  $R^2$ .

Здесь и далее полагаем, что положение объекта  $A$  в пространстве  $R^2$  определяет вектор  $u = (x_t, y_t, \theta)$ , а координаты точек  $(x, y) \in A$  определяются по формуле

$$x = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + x_t, \quad y = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta + y_t,$$

где  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка объекта  $A$  в собственной системе координат объекта  $A$ ,  $\theta$  — угол поворота,  $(x_t, y_t)$  — вектор трансляции объекта  $A$  в пространстве  $R^2$ .

В [4] показано, что множества  $A$  и  $B$  (рис. 1) всегда могут быть представлены в виде

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_p, \quad B = B_1 \cup \dots \cup B_q, \quad (1)$$

где  $\text{int } A_i \cap \text{int } B_j = \emptyset$ ,  $i \in I_p = \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $j \in I_q$ ,  $i \neq j$ ,  $A_i, B_j$  принадлежат семейству базовых объектов  $\mathfrak{S} = \{K, D, H, V\}$ ,  $\text{int}(\cdot)$  — внутренность множества  $(\cdot)$ . Здесь  $K$  —

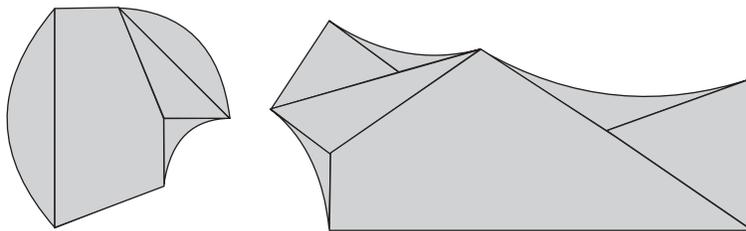


Рис. 1. Объекты  $A$  и  $B$

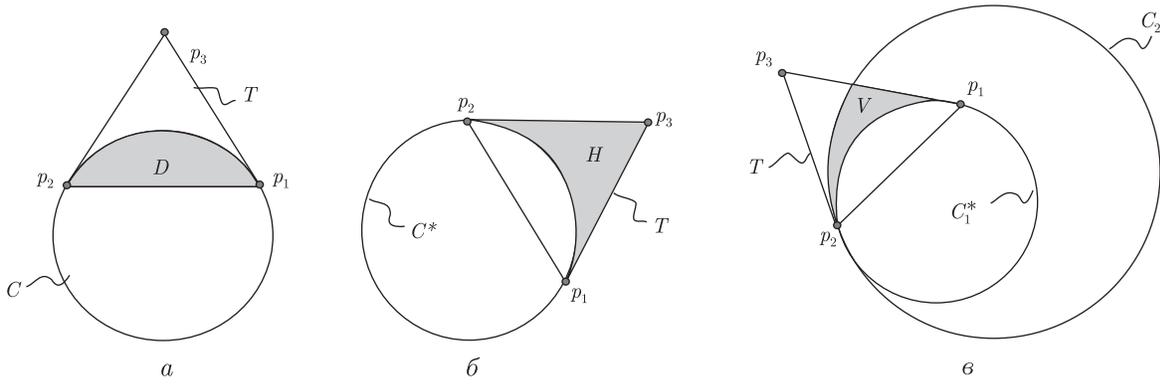


Рис. 2. Базовые объекты  $D, H, V$

выпуклый многоугольник, заданный вершинами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а стороны  $K$  — уравнениями  $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$ ,  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ ;  $D = T \cap C$  (рис. 2, а),  $T$  — треугольник с вершинами  $p_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $C$  — круг радиуса  $r$  с центром  $(x_c, y_c)$ ,  $p_1 = (x_1, y_1)$  и  $p_2 = (x_2, y_2)$  — концевые точки хорды сегмента  $D$ ;  $H = T \cap C^*$  (см. рис. 2, б),  $C^* = R^2 \setminus \text{int } C$ ,  $T = \text{conv}\{H\}$ , где  $\text{conv}\{\cdot\}$  — выпуклая оболочка множества  $\{\cdot\}$ ;  $V = T \cap C_1^* \cap C_2$  (см. рис. 2, в), где  $C_2$  — круг радиуса  $r_2 > r_1$ , при этом  $\Phi^{C^*C} = 0$ ,  $\Phi^{C^*C}$  —  $\Phi$ -функция  $C_2^*$  и  $C_1$  [4, 6]. Подробное описание объектов семейства  $\mathfrak{S}$  и метод декомпозиции произвольных  $\varphi$ -объектов на базовые объекты приведены в работах [4, 7].

Как известно [4, 5],  $\Phi$ -функция для объектов  $A$  и  $B$  вида (1) определяется так:

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) = \min\{\Phi_{ij}(u_A, u_B), i \in I_p, j \in I_q\}, \quad (2)$$

где  $\Phi_{ij}$  —  $\Phi$ -функция для множеств  $A_i \in \mathfrak{S}$ ,  $B_j \in \mathfrak{S}$ .

Из (2) следует, что для построения функции  $\Phi^{AB}$  необходимо построить полный класс  $\Phi$ -функций  $\Phi_{\mathfrak{S}}$  для множеств из семейства  $\mathfrak{S}$ , т. е.

$$\Phi_{\mathfrak{S}} = \{\Phi^{KK}, \Phi^{KH}, \Phi^{KD}, \Phi^{KV}, \Phi^{DD}, \Phi^{DH}, \Phi^{DV}, \Phi^{HH}, \Phi^{HV}, \Phi^{VV}\}.$$

Более того, поскольку для эффективного решения класса задач упаковки и раскроя используются градиентные методы оптимизации,  $\Phi$ -функция  $\Phi^{AB}(u_A, u_B)$ , а следовательно, и функция  $\Phi_{ij} \in \Phi_{\mathfrak{S}}$  должны быть свободны от радикалов.

Определим каждую  $\Phi$ -функцию из класса  $\Phi_{\mathfrak{S}}$ .

Прежде всего рассмотрим  $\Phi$ -функции для выпуклых объектов  $E \in \{K, C\}$

$$\Phi^{DE} = \max\{\Phi^{CE}, \Phi^{TE}\}, \quad (3)$$

где  $\Phi$ -функции  $\Phi^{TK}$  (в общем случае  $\Phi^{KK}$ ) и  $\Phi^{CC}$  приведены в [4–6], а  $\Phi^{CK}$  ( $\Phi^{KC}$ ) определена так:

$$\Phi^{CK} = \max_{i=1, \dots, m} \max\{\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i - r, \psi_i\}, \quad (4)$$

$$\psi_i = \min\{(x_C - x_i)^2 + (y_C - y_i)^2 - r^2,$$

$$(\beta_{i-1} - \beta_i)(x_C - x_i) - (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(y_C - y_i) + r(\alpha_{i-1}\beta_i - \alpha_i\beta_{i-1})\}.$$

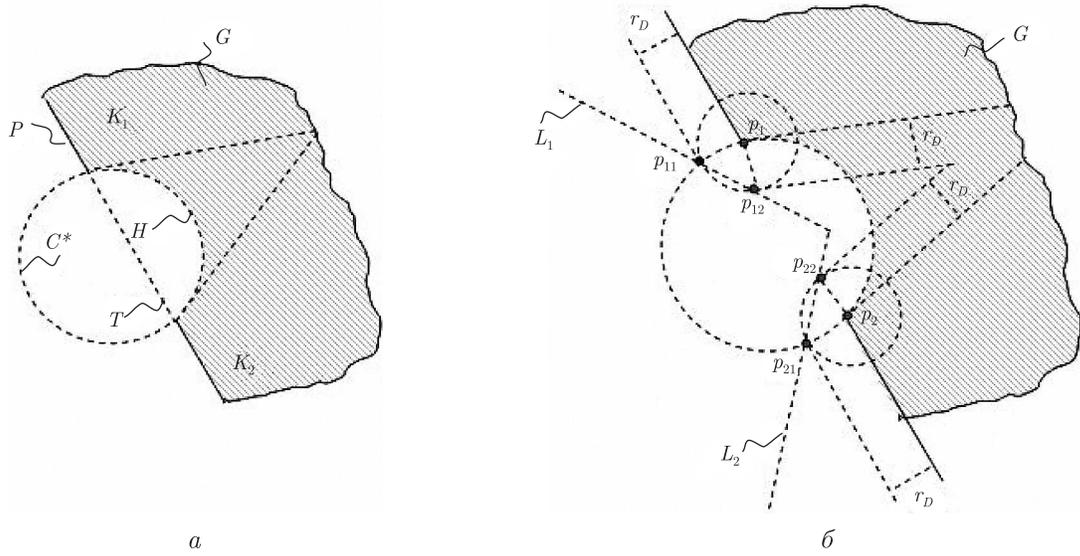


Рис. 3. Объекты  $H = G \cap T$  и  $G$

$\Phi$ -функция для сегментов  $D_i = C_i \cap T_i, i = 1, 2$ , имеет вид

$$\Phi^{DD} = \max\{\Phi^{C_1C_2}, \Phi^{C_1T_2}, \Phi^{T_1C_2}, \Phi^{T_1T_2}\}. \tag{5}$$

Прежде чем построить  $\Phi$ -функции для невыпуклых базовых объектов, определим  $\Phi$ -функции для пар объектов  $C^*$  и  $H$ ;  $C^*$  и  $D$ .

$\Phi$ -функция для  $C^*$  и  $H$  имеет вид

$$\Phi^{C^*H} = \min_{i=1,2,3} (r_C^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2),$$

где  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ , — вершины  $T = \text{conv}\{H\}$ .

Далее полагаем  $D = T \cap C'$ , где  $C'$  — круг радиуса  $r_{C'}$  с центром  $(x_{C'}, y_{C'})$ . Тогда, если  $r_{C'} \geq r_C$ , имеем  $\Phi^{C^*D} = \psi_0$ , где

$$\psi_0 = \min_{i=1,2} (r_C^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2). \tag{6}$$

Если  $r_{C'} < r_C$ , то

$$\Phi^{C^*D} = \min\{\psi_0, \max\{\psi_1, \chi_1, -\chi_2\}\}, \tag{7}$$

где  $\psi_0$  определяется (6),

$$\chi_i = (x_{C'} - x_C)(y_i - y_{C'}) - (y_{C'} - y_C)(x_i - x_{C'}), \quad i = 1, 2,$$

$$\psi_1 = \frac{r_C^2}{(r_C - r_{C'})^2} \cdot \Phi^{C^*C'}.$$

Далее рассмотрим объекты  $K$  и  $H$ . Для  $H = T \cap C^*$  введем множество  $G = C^* \cap P$ , где  $P = \{\alpha x + \beta y + \gamma \leq 0\}, T \subset P$ , тогда  $H = G \cap T$  (рис. 3, a).

Если  $E$  — любой выпуклый  $\varphi$ -объект, то  $\Phi^{EH} = \max\{\Phi^{ET}, \Phi^{EG}\}$ , в частности

$$\Phi^{KH} = \max\{\Phi^{KT}, \Phi^{KG}\}, \quad (8)$$

где

$$\Phi^{KG} = \min\{\Phi^{K_1K}, \Phi^{K_2K}, \psi\}, \quad (9)$$

здесь  $\psi = \min_{i=1, \dots, m} \max\{r_C^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2, \alpha x_i + \beta y_i + \gamma\}$ ,  $r_C$  — радиус круга  $C = R^2 \setminus \text{int } C^*$  (см. рис. 3, а).

Далее рассмотрим объекты  $D$  и  $H$ . Пусть  $D = T_D \cap C_D$ ,  $H = G \cap T$ ,  $G = C^* \cap P$  и  $r_D \geq r_C$ , тогда функция  $\Phi^{DH}$  определяется формулами (8), (9) при  $m = 2$ .

Если  $r_D < r_C$ , то  $\Phi$ -функция для  $D$  и  $H$  задается так:

$$\Phi^{DH} = \max\{\Phi^{DT}, \Phi^{DG}\}, \quad (10)$$

где

$$\Phi^{DG} = \min\{\Phi^{K_1D}, \Phi^{K_2D}, \psi\}, \quad (11)$$

здесь  $\psi = \max\{\Phi^{C^*D}, \Phi^{GT_D}, \Phi^{GC_D}\}$ ,  $\Phi^{GT_D}$  —  $\Phi$ -функция для  $G$  и  $T_D$ ;  $\Phi^{GC_D}$  —  $\Phi$ -функция для  $G$  и круга  $C_D$  вида

$$\Phi^{GC_D} = \max\{\Phi^{C^*C_D}, \Phi^{PC_D}, \min\{\omega_1, \psi_1, \omega_2, \psi_2\}\}, \quad (12)$$

где  $\omega_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r_D)^2$ ,  $\psi_i = 0$  — уравнения прямых  $L_i$ , проходящих через точки  $p_{i1}$  и  $p_{i2}$ ,  $\psi_i(O_C) > 0$ ,  $i = 1, 2$  (см. рис. 3, б).

Пусть  $H_i = G_i \cap T_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $G_i = C_i^* \cap P_i$ , где  $P_i = \{\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i \leq 0\}$ ,  $T_i \subset P_i$ . Тогда  $\Phi$ -функцию для объектов  $H_1$  и  $H_2$  можно определить следующим образом:

$$\Phi^{HH} = \max\{\Phi^{T_1H_2}, \Phi^{T_2H_1}, \Phi^{G_1H_2}, \Phi^{G_2H_1}, \omega\}, \quad (13)$$

где  $\Phi^{TH}$  определяется выражением (8),

$$\omega = \min\{\alpha_1 x_{23} + \beta_1 y_{23} + \gamma_1, \alpha_2 x_{13} + \beta_2 y_{13} + \gamma_2, \max_{i=1,2} \min\{(r_{C_1})^2 - (x_{C_1} - x_{2i})^2 - (y_{C_1} - y_{2i})^2, (r_{C_2})^2 - (x_{C_2} - x_{1i})^2 - (y_{C_2} - y_{1i})^2\}\},$$

а  $\Phi^{GH}$  задается в виде

$$\Phi^{GH} = \min\{\Phi^{K_1H}, \Phi^{K_2H}, \psi\}, \quad (14)$$

здесь  $\psi = \min_{i=1,2,3} \max\{r_C^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2, \alpha x_i + \beta y_i + \gamma\}$ .

Далее рассмотрим  $\Phi$ -функции для объекта  $V$  и объектов семейства  $\mathfrak{Z} = \{K, D, H, V\}$ .

Пусть  $V = H_V \cap W$ , где  $W = D \cup T$ ,  $T$  — треугольник с вершинами  $p_1, p_2, p_3$ ,  $D$  — сегмент с концевыми “вершинами”  $p_2, p_3$  (рис. 4).

$\Phi$ -функцию для объектов  $V$  и  $K$  зададим так:

$$\Phi^{VK} = \max\{\Phi^{HK}, \Phi^{WK}\}, \quad (15)$$

где  $\Phi^{WK} = \min\{\Phi^{DK}, \Phi^{TK}\}$ .

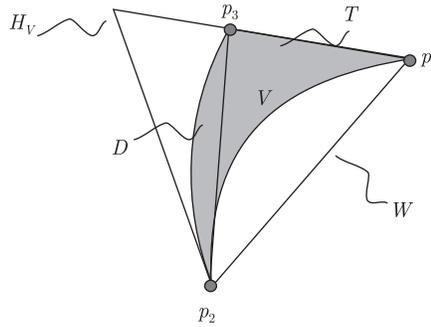


Рис. 4. Объект  $V = H_V \cap W$

$\Phi$ -функция для пар объектов  $V$  и  $D$ ,  $V$  и  $H$  определяется аналогично:

$$\Phi^{VD} = \max\{\Phi^{HD}, \Phi^{WD}\}, \quad (16)$$

$$\Phi^{VH} = \max\{\Phi^{H_V H}, \Phi^{WH}\}, \quad (17)$$

где  $\Phi^{WD} = \min\{\Phi^{DD}, \Phi^{TD}\}$ ,  $\Phi^{WH} = \min\{\Phi^{DH}, \Phi^{TH}\}$ .

Пусть  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $V_i = H_i \cap W_i$ ,  $W_i = D_i \cup T_i$ , тогда  $\Phi$ -функция для  $V_1$  и  $V_2$  примет вид

$$\Phi^{V_1 V_2} = \max\{\Phi^{H_1 H_2}, \Phi^{H_1 W_2}, \Phi^{H_2 W_1}, \Phi^{W_1 W_2}\}, \quad (18)$$

где  $\Phi^{W_1 W_2} = \min\{\Phi^{D_2 D_1}, \Phi^{T_2 T_1}, \Phi^{D_2 T_1}, \Phi^{D_1 T_2}\}$  —  $\Phi$ -функция для объектов  $W_1 = D_1 \cup T_1$  и  $W_2 = D_2 \cup T_2$ .

Таким образом, формулы (3)–(18) описывают полный класс  $\Phi$ -функций для базовых объектов семейства  $\mathfrak{S}$ .

Из (1)–(18) вытекает следующее утверждение.

**Теорема.** Для замкнутых  $\varphi$ -объектов  $A$  и  $B$ , границы которых формируются объединением дуг окружностей и отрезков прямых, всегда существует свободная от радикалов  $\Phi$ -функция.

Следует отметить, что для формирования  $\Phi$ -функций используются только бесконечно дифференцируемые функции.

Рассмотрим пример построения  $\Phi$ -функции для объектов  $A$  и  $B$ , приведенных на рис. 1. Применения алгоритм декомпозиции [7], имеем:  $A = A_1 \cup \dots \cup A_5$  и  $B = B_1 \cup \dots \cup B_7$ . Тогда  $\Phi$ -функция  $\Phi^{AB}$  примет вид  $\Phi^{AB} = \min\{\Phi_{11}, \Phi_{21}, \dots, \Phi_{57}\}$ , где  $\Phi_{ij} \in \{\Phi^{KK}, \Phi^{DK}, \Phi^{HK}, \Phi^{HD}, \Phi^{HH}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$ .

Результаты данных исследований могут быть использованы при решении 2D-задач упаковки и раскроя [1, 2, 8].

1. Wäscher G., Haußner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // Eur. J. Operat. Res. – 2007. – **183**, Is. 3, No 16. – P. 1109–1130.
2. Bennell J. A., Oliveira J. F. The geometry of nesting problems: a tutorial // Ibid. – 2008. – **184**. – P. 397–415.
3. Stoyan Yu. G.  $\Phi$ -function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
4. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Comput. Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43**, No 5. – P. 535–553.
5. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Tools of mathematical modeling of arbitrary object packing problems // J. Ann. Oper. Res. – 2010. – **179**, No 1. – 343–368.

6. *Stoyan Yu., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.* Phi-functions for primary 2D-objects // *Studia Informatica Universalis*. – 2001. – **2**. – P. 1–32.
7. *Гиль Н. И., Романова Т. Е., Злотник М. В.* Декомпозиция двумерных геометрических объектов // *Доп. НАН України*. – 2010. – № 7. – С. 33–37.
8. *Burke E., Hellier R., Kendall G., Whitwell G.* A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem // *Oper. Res.* – 2006. – **54**. – P. 587–601.

*Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков  
Университет Алабамы, Бирмингем, США*

*Поступило в редакцию 21.04.2010*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, T. E. Romanova,  
N. I. Chernov, A. V. Pankratov**

### **Complete class of $\Phi$ -functions for basic two-dimensional $\varphi$ -objects**

*The article considers a family  $\mathfrak{S}$  of basic two-dimensional  $\varphi$ -objects. We allow translation and rotation affine mappings of the  $\varphi$ -objects in a two-dimensional Euclidean space. We derive a complete class of  $\Phi$ -functions for  $\varphi$ -objects of the family  $\mathfrak{S}$ , using infinitely differentiable functions only. The theorem of existence of a free radical  $\Phi$ -function for a pair of arbitrary  $\varphi$ -objects, whose boundaries are formed by the union of line segments and circular arcs, is formulated.*