



УДК 532.59:517.95

© 2010

Член-кореспондент НАН України В. А. Даниленко, В. В. Куліч

Моделювання довгих акустичних хвиль у шаруватих періодичних баротропних релаксуючих середовищах

Проведено чисельне моделювання руху довгих акустичних хвиль у шаруватих періодичних баротропних релаксуючих середовищах: вода — твердий компонент; вода — твердий компонент — твердий релаксуючий компонент та вода — повітря. Показано, що малі збурення параметрів поширюються в них як в усереднених однорідних середовищах.

У даному повідомленні проведено математичне моделювання довгих акустичних хвиль у багат шарових періодичних середовищах у плоскій одновимірній постановці. Періодичне середовище — це велика кількість однакових елементарних комірок з незмінним масовим складом компонентів: шарів води і твердої речовини або повітря. Третій компонент є релаксуючим.

У кожному шарі середовище є суцільним та однорідним. Для опису руху речовини шарів використовуємо рівняння гідродинаміки в лагранжевих масових координатах [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad (1)$$

де s — лагранжева масова координата; t — час; u — масова швидкість; V — питомий об'єм; p — тиск.

Нерелаксуючі компоненти підпорядковуються рівнянню стану Тета з відповідними коефіцієнтами:

$$p = p_0 + \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_i} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_{i0}} \right)^{\gamma_i} - 1 \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Тут $p_0 = 0,1$ МПа — атмосферний тиск. Властивості води: $\rho_{20} = 1000$ кг/м³ — початкова густина; $c_{20} = 1500$ м/с — швидкість звуку при атмосферному тиску; $\gamma_2 = 7$ — показник адіабати. Для твердої речовини: $\rho_{30} = 2650$ кг/м³; $c_{30} = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$; для повітря: $\rho_{10} = 1,3$ кг/м³; $\gamma_1 = 1,4$; $c_{10} = 328$ м/с.

Компонента, що релаксує, підпорядковується динамічному рівнянню стану першого порядку у часі [2, 3]:

$$\frac{dp}{dt} = c_f^2 \frac{d\rho}{dt} - \frac{p - p_e}{\tau}, \quad (3)$$

де $\tau = 10$ мкс — час релаксації; p_e — рівноважний тиск; c_f — заморожена швидкість звуку. Вважається, що рівноважний (p_e) та заморожений (p_f) тиски задаються також рівнянням Тета з відповідними параметрами: $\rho_{e0} = \rho_{f0} = \rho_{30}$; $c_{f0} = 6$ км/с; $c_{e0} = 3$ км/с; $\gamma_f = 7$; $\gamma_e = 4$.

Рух речовини в кожному шарі описується рівняннями (1) та одним з двох рівнянь (2) або (3). Їх числове розв'язання здійснюється скінченно-різницевою методом Годунова першого порядку точності у часі та просторі [4].

Розрахунки проводили за безрозмірними величинами. За характерні параметри вибрано: $p = 1$ ГПа; $x = 0,01$ м; $\rho = 1000$ кг/м³; $u = 1000$ м/с; $t = 10^{-5}$ с; $s = 10$ кг/м².

У розрахунках використовували близько 300 елементарних комірок за розмірами $\varepsilon_{E0} = 5$ см. Крок у просторі вибирався таким, що менший шар вміщував мінімум 10 розрахункових точок.

Для порівняння проводили розрахунки усереднених задач, рівняння яких отримано асимптотичним методом [2, 3]. Усереднені рівняння в нульовому за періодом структури наближенні набувають такого вигляду:

$$\frac{\partial \langle V^{(0)} \rangle}{\partial t} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial m} = 0, \quad d \langle V^{(0)} \rangle = - \left\langle \frac{V^{(0)2}}{c^{(0)2}} \right\rangle dp^{(0)} \quad (4)$$

(тут m — повільна змінна). Середні значення шарової системи знаходимо, зокрема для питомого об'єму двокомпонентного середовища, за формулою $\langle V \rangle = k_2 V_2 + k_3 V_3$, де k_i — масовий склад i -ї компоненти.

Доведено, що $p^{(0)}$, $u^{(0)}$ й $p^{(1)}$ не залежать від швидкої змінної ξ на відміну від питомого об'єму $V^{(0)} = V^{(0)}(\xi)$.

Рівняння (4) утворюють гіперболічну систему, що дозволяє для її числового розв'язання використовувати метод Годунова.

Запропоновано таку формулу для обчислення усередненої швидкості звуку [5, 6]:

$$c_E = \left(\left\langle \frac{1}{\lambda} \right\rangle \langle \rho \rangle \right)^{-1/2}, \quad (5)$$

де $\lambda = \rho dp/d\rho = \rho c^2$ — коефіцієнт стисливості незбуреного середовища.

При атмосферному тиску

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \right\rangle = \frac{\alpha_2}{\rho_{20} c_{20}^2} + \frac{\alpha_3}{\rho_{30} c_{30}^2} = \frac{k_2}{\rho_{20}^2 c_{20}^2 V_0} + \frac{k_3}{\rho_{30}^2 c_{30}^2 V_0} = V_0^{-1} \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle_0.$$

Тут V_0 — середній питомий об'єм середовища; α_i — склад компонентів за об'ємом; $k_i = \alpha_i V_0 \rho_{i0}$.

Усереднені швидкості звуку для моделі (4) у лагранжевій та ейлеровій системах координат знаходяться за формулами

$$c_L = \left\langle \frac{V^{(0)2}}{c^{(0)2}} \right\rangle^{-1/2}, \quad c_E = \langle V^{(0)} \rangle c_L. \quad (6)$$

Співвідношення (5) й (6) збігаються при атмосферному тиску.

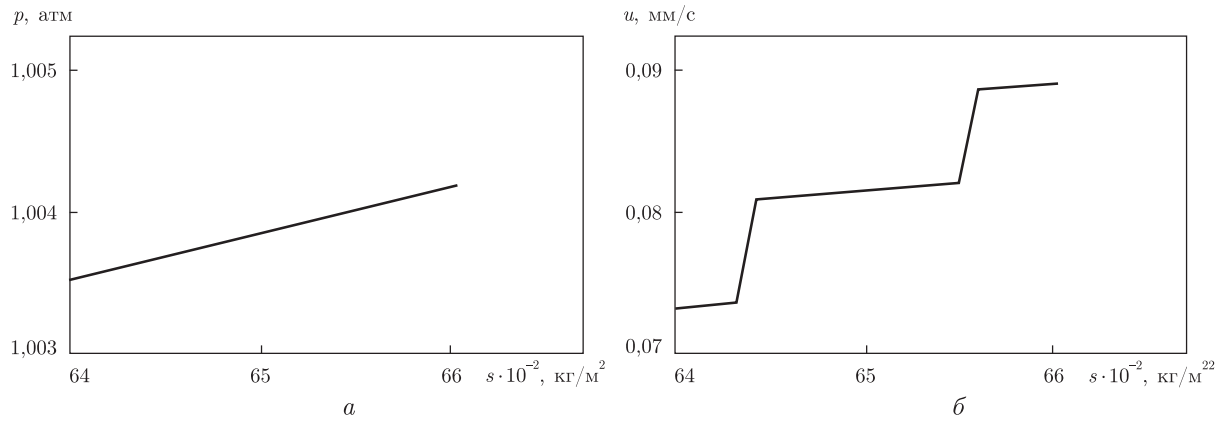


Рис. 1. Розподіл тиску (а) та масової швидкості (б) в акустичному збуренні в одній з елементарних комірок при $t = 150$ мкс

Моделювання руху збурень. Для мікроструктурного середовища вода — твердий компонент початковий склад компонентів становив: $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$; інші параметри середовища — $\rho_0 = 2320$ кг/м³; $k_2 = 0,0862$; $k_3 = 0,9138$; $\varepsilon_L = 116$ кг/м².

Проведено чисельне моделювання поширення збурення малої амплітуди в мікроструктурному середовищі, яке спочатку є нерухомим та задавалося формулою ($\Delta = 0,01$):

$$p = p_0 + \Delta p_0 e^{-s^2/(100\varepsilon_L^2)}. \quad (7)$$

З цього виразу випливає, що збурення охоплює більш ніж 60 елементарних комірок періодичного середовища.

З часом збурення розпадається на два однакових, які симетрично рухаються в протилежних напрямках. Завдяки симетрії задачі розрахунки проводили тільки для додатних просторових координат $s > 0$.

Розподіли тиску та масової швидкості у збуренні в елементарній комірці в момент часу $t = 150$ мкс зображено на рис. 1. Тиск майже однаково змінюється в компонентах. Зміна масової швидкості здійснюється в основному в рідкому компоненті. Різниця в поведінці цих параметрів проявляється в усередненій задачі: масова швидкість у першому наближенні за періодом структури $u^{(1)}$ залежить від швидкої змінної ξ , а тиск $p^{(1)}$ не залежить від неї.

Розподіли тиску в періодичному середовищі вода — твердий компонент у різні моменти часу зображено суцільною лінією на рис. 2, а. Для порівняння розраховано рух акустичного збурення за допомогою розв'язання усередненої системи (4), що тотожно розв'язку прямої задачі. Максимум тиску рухається з постійною швидкістю $c_{L1} = 4,74 \cdot 10^6$ кг/(м² · с); $c_E = 2,04$ км/с. Величина швидкості звуку, що обчислена за формулою (4) $c_{L2} = 4,73 \cdot 10^6$ кг/(м² · с) $\approx c_{L1}$, тобто рух акустичного збурення відповідає рівнянням (4).

Чисельне моделювання поширення збурення малої амплітуди здійснено для релаксуючого середовища. Елементарна комірка мала такі властивості, які близькі до періодичного середовища вода — твердий компонент: $s_r = 26$ кг/м²; $s_2 = 10$ кг/м²; $s_3 = 80$ кг/м². Релаксуючий компонент спочатку знаходився в рівноважному стані.

Профілі тиску в різні моменти часу зображено штриховою лінією на рис. 2, а. Спостерігається усереднений рух акустичного збурення з меншою швидкістю. За 1,5 мс руху амплітуда збурення помітно зменшилася в релаксуючому середовищі.

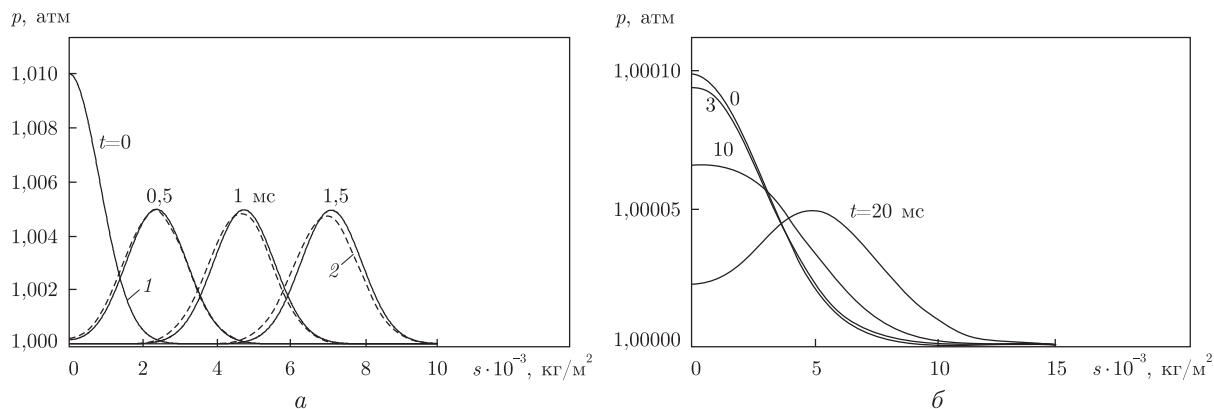


Рис. 2. Рух акустичного збурення в періодичних середовищах: а — вода — твердий компонент (1), релаксуюче (2); б — сильнонеоднорідне вода — повітря

Математичне моделювання поширення збурення малої амплітуди розглядається для періодичного сильнонеоднорідного середовища вода — повітря. В початковий момент задавалося нерухоме збурення (7) з параметром $\Delta = 0,0001$. Початковий склад компонентів становив: $\alpha_1 = 0,2$; $\alpha_2 = 0,8$; інші параметри середовища — $\rho_0 = 800 \text{ кг/м}^3$; $k_1 = 0,000325$; $k_2 = 0,999675$.

Шар повітря вміщував 13 розрахункових точок з однаковим безрозмірним кроком у просторі: $h = 0,0001$. При такому незмінному кроці у просторі на шар води припадає 40000 точок. Для їх зменшення використовується змінний h , який збільшується в геометричній прогресії $h_{i+1} = 1,01h_i$, починаючи від межі шарів. З середини шару води крок у просторі починає аналогічно зменшуватися: $h_{i+1}1,01 = h_i$. Завдяки такому алгоритму досягається невелика похибка різницевих рівнянь [1]. При розбитті простору на одну елементарну комірку тепер припадає 1077 точок.

Профілі тиску в сильнонеоднорідному середовищі вода — повітря в різні моменти часу для $s > 0$ зображено на рис. 2, б. Спочатку формується рух збурення, з часом встановлюється постійна швидкість переднього фронту. Елемент профілю при тиску $p = p_0 (1 + 2,34 \cdot 10^{-5})$ рухається зі швидкістю $c_{Lp} = 2,29 \cdot 10^4 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. З формул (6) маємо $c_L = 2,37 \cdot 10^4 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$; $c_E = 29,6 \text{ м/с}$. Близькість значень c_{Lp} й c_L вказує на те, що в даній постановці задачі для сильнонеоднорідних структур справедливі рівняння (4).

Таким чином, у розглянутих системах спостерігаються усереднений рух довгих акустичних збурень тиску й аналогічна поведінка масової швидкості та збурення усередненого питомого об'єму.

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — Москва: Наука, 1992. — 424 с.
2. Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В. Элементы теории самоорганизации и нелинейных волновых процессов в природных средах со структурой. — Киев, 1991. — 44 с. — (Препр. / Ин-т геофизики АН УССР).
3. Вахненко В. А., Кулич В. В. Длинноволновые процессы в периодической среде // Прикл. мат. и техн. физика. — 1992. — № 6. — С. 49–56.
4. Роменский Е. И. Разностная схема Годунова для одномерных релаксационных уравнений термоупругопластичности // Тр. Ин-т математики СО АН СССР. Т. 11. Вычислительные проблемы в задачах математической физики. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 101–115.
5. Сандраков Г. В. Осреднение линеаризованной системы гидродинамики с малой вязкостью и скорость звука в смесях. — Москва, 1987. — 30 с. — (Препр. / Отд-ние вычисл. мат. АН СССР; № 178).

6. Бахвалов Н. С., Сандраков Г. В., Эглит М. Э. Математическое моделирование процесса распространения звуковых волн в смесях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1996. – № 6. – С. 19–21.

*Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ*

Надійшло до редакції 06.05.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, V. V. Kulich**

Modeling of long acoustic waves in layered periodic barotropic media

Long acoustic waves in layered periodic barotropic relaxing media such as water – solid, water – solid – solid relaxing component, and water – air are numerically modeled. It is demonstrated that the small disturbances of parameters propagate as those in averaged homogeneous media.