УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, І. Я. Субботін, В. А. Чупордя

Про групи, власні підгрупи яких або пронормальні, або субнормальні

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Нехай G — група. Підгрупа H групи G називається пронормальною, якщо для кожного $g \in G$ підгрупи H і H^g є спряженими у підгрупі $\langle H, H^g \rangle$. У роботі досліджуються неперіодичні групи, підгрупи яких або пронормальні, або субнормальні.

Для багатьох важливих типів підгруп у групі існують їх антиподи, тобто підгрупи, властивості яких діаметрально протилежні властивостям даних підгруп. Таким антиподом нормальних підгруп є контранормальні підгрупи. Згідно з Д. Роусом [1], підгрупа H групи G називається *контранормальною*, якщо $H^G = G$. Контранормальні підгрупи можуть розглядатися і як антиподи таких узагальнень нормальних підгруп, як підгрупи, що є відмінними від своїх нормалізаторів, та субнормальні підгрупи. На це вказують такі відомі критерії нільпотентності скінченних груп:

скінченна група G є нільпотентною тоді і тільки тоді, коли кожна її підгрупа є субнормальною в G;

скінченна група G є нільпотентною тоді і тільки тоді, коли вона не містить власних контранормальних підгруп.

Іншим антиподом для підгруп, відмінних від своїх нормалізаторів, і субнормальних підгруп є *самонормалізовні підгрупи*, тобто підгрупи, які збігаються зі своїми нормалізаторами. Важливим специфічним типом самонормалізовних підгруп є абнормальні підгрупи. Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *абнормальною*, якщо для довільного елемента g з G підгрупа $\langle H, H^g \rangle$ містить цей елемент g. Зазначимо, що довільна абнормальна підгрупа буде також контранормальною. Образно кажучи, підгрупи та їх антиподи розташовані на різних полюсах групи, між якими розташовані інші різноманітні проміжні підгрупи. Чим менше цих проміжних підгруп, тим структура групи стає більш чіткою, визначеною. Зокрема, природно розглянути ситуацію, коли серед підгруп групи присутні тільки підгрупи певного типу і їх антиподи. У роботі А. Фаттахі [2], що є однією з перших, в якій реалізовано такий підхід, описані скінченні групи, будь-яка підгрупа яких або нормальна, або абнормальна. Г. Еберт і С. Бауман [3] узагальнили результати роботи [2], розглянувши скінченні групи, усі підгрупи яких або субнормальні, або абнормальні. Нескінченні групи з цією властивістю вивчали пізніше М. де Фалько, Л. А. Курдаченко, І. Я. Субботін [4], які також розглянули групи, усі підгрупи яких або субнормальні, або контранормальні. Пізніше в роботі Л. А. Курдаченка і Х. Сміта [5] були досліджені групи, усі підгрупи яких або субнормальні, або самонормалізовні. Природно, задачі такого роду містять у собі задачі про будову груп, усі підгрупи яких мають один тип. Це одна з найбільш старих і класичних задач теорії груп. Зокрема, істотну роль у вивченні вказаних вище груп відіграють властивості груп, усі підгрупи яких субнормальні. Над цією проблематикою, що має багату історію, працювало безліч відомих алгебраїстів, у ній отримано численні цікаві та глибокі результати. Ми не будемо торкатися цієї тематики, вона досить добре описана К. Касоло [6]. Відзначимо лише цікавий факт, що для деяких груп не є можливим одночасне існування в них субнормальних підгруп і їх антиподів. Такого роду класи груп розглядались у роботах [4, 5]. З класів, що там досліджувались, такими виявились неперіодичні групи і, зокрема, групи без скруту виявились нільпотентними. Інакше кажучи, були отримані деякі критерії нільпотентності груп.

Пронормальні підгрупи є узагальненням абнормальных підгруп. Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *пронормальною*, якщо для довільного елемента g з G підгрупи H і H^g є спряженими в $\langle H, H^g\rangle$. У роботі [7] розглядалася будова груп, усі підгрупи яких є пронормальними за деяких природних обмежень на групу.

Будь-яка пронормальна підгрупа є контранормальною у своєму нормальному замиканні, так що деякі її властивості також протилежні властивостям субнормальних підгруп. Варто зазначити, що між субнормальними і пронормальними підгрупами вже немає такого різкого контрасту, як між субнормальними і абнормальними підгрупами. Пронормальна підгрупа може бути субнормальною, але у цьому разі вона є нормальною. У работах П. Леговіні [8, 9] вивчались скінченні групи, усі підгрупи яких або субнормальні, або пронормальні. У даній роботі починається вивчення нескінченних груп такого роду. Як і для інших нескінченних груп тут відразу виникає питання про те, у якому класі можливий достатньо чіткий опис таких груп. У зв'язку з цим зазначимо, що А. Ю. Ольшанським [10, гл. 9] були побудовані нескінченні p-групи для достатньо великих простих чисел p, усі власні неодиничні підгрупи яких мають простий порядок p. Тому будь-яка власна неодинична підгрупа такої групи буде максимальною і не буде нормальною, тобто буде абнормальною. Зокрема, усі підгрупи такої групи пронормальні. Цей приклад показує, що реальний опис нескінченних груп, всі підгрупи яких або субнормальні, або пронормальні, є можливим тільки за деяких обмежень. У нашій роботі таким обмеженням є локальна майже розв'язність групи. Це обмеження є досить типовим у такого роду дослідженнях. Основною метою роботи є розгляд неперіодичних груп, усі підгрупи яких або субнормальні, або пронормальні. Наведемо тут не тільки основний результат роботи, а весь перелік основних лем, що дасть змогу побачити каркас доведення.

Лема 1. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною.*

(i) Якщо H — підгрупа G, то довільна підгрупа H або пронормальна, або субнормальна.

(ii) Якщо L — нормальна підгрупа G, то будь-яка підгрупа G/L або пронормальна, або субнормальна.

(iii) Якщо U, V — підгрупи G, до того ж U — нормальна в V, то довільна підгрупа V/U або пронормальна, або субнормальна.

Нижченаведений результат, який було доведено в роботі [11], є дуже корисним для наших досліджень.

Лема 2. *Нехай G — локально нільпотентна група. Якщо підгрупа H пронормальна в групі G, то вона нормальна в G.*

Наслідок 1. *Нехай G — група, всі підгрупи якої або пронормальні, або субнормальні. Якщо H — локально нільпотентна підгрупа G, то будь-яка підгрупа H субнормальна в H.*

Наслідок 2. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною, або субнормальною. Якщо H — локально нільпотентна підгрупа G, то H — розв'язна.*

Якщо G — група, то покладемо

$$\mathbf{B}(G) = \langle g \in G | \langle g \rangle \text{ є субнормальною підгрупою } G \rangle.$$

Підгрупа $\mathbf{B}(G)$ називається *радикалом Бера* групи G.

Відзначимо, що підгрупа $\mathbf{B}(G)$ локально нільпотентна (див., напр., [12, теорема 2.5.1]).

Лема 3. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Якщо локально нільпотентна підгрупа H містить елемент $g \notin \mathbf{B}(G)$, то циклічна підгрупа $\langle g \rangle$ нормальна в H і $H/\langle g \rangle$ буде дедекіндовою групою.*

Наслідок 1. *Нехай G — група, усі підгрупи якої або пронормальні, або субнормальні. Якщо $\mathbf{B}(G)$ не містить локально нільпотентну підгрупу H, то H — нільпотентна.*

Наслідок 2. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді її радикал Бера збігається з локально нільпотентним радикалом.*

Нагадаємо, що група G називається *T-групою*, якщо кожна її субнормальна підгрупа буде нормальною в G. Група G називається *$\overline{T}$-групою*, якщо довільна підгрупа G є T-групою.

Лема 4. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді $G/\mathbf{B}(G)$ буде $\overline{T}$-групою.*

Наслідок. *Нехай G — локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною, $B = \mathbf{B}(G)$.*

(i) Якщо G/B не є періодичною, то G/B — абелева.

(ii) Якщо G/B — періодична, то G/B містить у собі таку абелеву нормальну підгрупу L/B, що кожна підгрупа L/B є G-інваріантною, G/L — дедекіндова група, $2 \notin \Pi(L/B)$ і $\Pi(L/B) \bigcap \Pi(G/L) = \varnothing$.

Лема 5. *Нехай G — локально скінченна группа і нехай H — нормальна підгрупа G. Нехай далі π — множина простих чисел і припустимо, що будь-яка силовська π-підгрупа G буде локально нільпотентною. Якщо G має пронормальну силовську π-підгрупу S, то SH/H є силовською π-підгрупою G/H.*

Твердження 1. *Нехай G — локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді всяка підгрупа $G/\mathbf{B}(G)$ буде пронормальною.*

Лема 6. *Нехай G — локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді радикал Бера групи G відмінний від $\langle e \rangle$.*

Твердження 2. *Нехай G — локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді G — розв'язна.*

Лема 7. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Нехай далі $g \in G \setminus \mathbf{B}(G)$ і припустимо, що G містить такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи A, B, що A — нормальна в B і B/A — абелева група без скруту. Якщо елемент g має скінченний порядок, то $g \in C_G(B/A)$.*

Лема 8. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Нехай далі g — елемент нескінченного порядку і $g \notin \mathbf{B}(G)$. Припустимо, що G містить у собі такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи A, B, що A — нормальна в B і B/A — абелева група без скруту. Якщо існує таке натуральне число k, що $g^k \in C_G(B/A)$, то $g \in C_G(B/A)$.*

Лема 9. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Нехай далі g — такий елемент нескінченного порядку, що $\langle g \rangle \bigcap \mathbf{B}(G) = \langle 1 \rangle$. Припустимо, що G містить у собі такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи A, B, що A — нормальна в B і B/A є абелевою групою без скруту. Тоді $g \in C_G(B/A)$.*

Наслідок 1. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Нехай далі $g \in G \setminus \mathbf{B}(G)$ і припустимо, що G містить у собі такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи A, B, що A — нормальна в B і B/A є абелевою групою без скруту. Тоді $g \in C_G(B/A)$.*

Наслідок 2. *Нехай G — група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Припустимо, що $\mathbf{B}(G)$ містить у собі такі G-інваріантні підгрупи A, B, що $A \leqslant B$ і B/A — абелева група без скруту. Якщо фактор B/A центральний в $\mathbf{B}(G)$, то фактор B/A центральний і в G.*

Теорема 1. *Нехай G — локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді G містить у собі таку нормальну періодичну підгрупу T, що G/T є нільпотентною і не має скруту.*

Наслідок. *Нехай G — локально майже розв'язна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Якщо G не має скруту, то G — нільпотентна.*

У загальних рисах можна отримати картину будови локально скінченної групи, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною

Теорема 2. *Нехай G — локально скінченна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або субнормальною. Тоді в G знайдуться підгрупи $K \leqslant B \leqslant G$, які задовольняють такі умови:*

(i) B — радикал Бера групи G, K — така нільпотентна нормальна підгрупа B, що B/K — подільна абелева група скінченного спеціального рангу.

(ii) Кожна підгрупа G/B пронормальна, так що або G/B — дедекіндова група, або G/B містить у собі нормальну абелеву підгрупу L/B, яка задовольняє такі умови:

(iia) кожна підгрупа L/B є G-інваріантною;

(iib) G/B є напівпрямим добутком L/B на D/B, де D/B — дедекіндова група;

(iic) $2 \notin \Pi(L/B)$;

(iid) $\Pi(L/B) \bigcap \Pi(D/B) = \varnothing$.

Деталізація будови локально скінченних груп, кожна підгрупа яких є пронормальною або субнормальною, потребує спеціального окремого розгляду.

1. *Rose J. S.* Nilpotent subgroups of finite soluble groups // Math. Z. – 1968. – **106**. – P. 97–112.
2. *Fattahi A.* Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. – 1974. – **28**, No 1. – P. 15–19.
3. *Ebert G., Bauman S.* A note of subnormal and abnormal chains // Ibid. – 1975. – **36**. – P. 287–293.
4. *De Falco M., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Groups with only abnormal and subnormal subgroups // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1998. – **47**. – P. 435–442.
5. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with all subgroups either subnormal or self-normalizing // J. Pure and Appl. Algebra. – 2005. – **196**. – P. 271–278.
6. *Casolo C.* Groups with all subgroups subnormal // Conf. "Advances in Group Theory and Applications 2007", Otranto, Italy, 4–8 June, 2007. – Otranto, 2007. – 148 p.
7. *Kuzenny N. F., Subbotin I. Ya.* Groups in which all subgroups are pronormal // Ukr. Math. J. – 1987. – **39**, No 3. – P. 325–329.
8. *Legovini P.* Gruppi finite i cue sottogruppi sono o subnormali o pronormali // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1977. – **58**. – P. 129–147.
9. *Legovini P.* Gruppi finite i cue sottogruppi sono o subnormali o pronormali // Ibid. – 1981. – **65**. – P. 47–51.
10. *Olshanskii A. Yu.* Geometry of defining relations in groups. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 448 p.
11. *Kuzennyi N. F., Subbotin I. Ya.* New characterization of locally nilpotent IH-groups // Ukr. Math. J. – 1988. – **40**. – P. 322–326.
12. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. – Oxford: Clarendon Press, 1992. – 253 p.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 10.04.2009

L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. A. Chupordya

On the groups, whose subgroups are either pronormal or subnormal

Let G be group. A subgroup H of G is said to be pronormal if, for every element g of G, the conjugates H and H^g are already conjugate in the subgroup $\langle H, H^g \rangle$ generated by H and H^g. Here we study nonperiodic groups, whose subgroups are either subnormal or pronormal.