УДК 517.929

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк, Т. А. Лукьянова**

Об устойчивости нейронной сети на временной шкале

Отримано достатні умови рівномірної асимптотичної, експоненціальної та рівномірної експоненціальної стійкості стану рівноваги нейронної системи на часовій шкалі. Наведено достатні умови регресивності функції системи та достатні умови існування та єдиності стану рівноваги нейронної системи.

Динамика нейронной сети в непрерывном и дискретном случаях исследована достаточно подробно (см., напр., [1, 2] и приведенную там библиогр.). На вопрос о том, что происходит в нейронной сети, работающей в режиме непрерывно-дискретной во времени системы, "между" непрерывным и дискретным состояниями, позволяет дать ответ теория динамических уравнений на временной шкале. Элементы математического анализа на временной шкале приведены во многих работах (см., напр., [3] и приведенную там библиогр.).

В данной работе описывается нейронная сеть на временной шкале и исследуется равномерная асимптотическая устойчивость и равномерная экспоненциальная устойчивость. В качестве примера рассматривается двухкомпонентная нейронная сеть на временной шкале.

Основные обозначения и определения [3]. Временной шкалой $\mathbb{T}$ называется произвольное непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Примерами временной шкалы являются: множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$, множество $q^{\mathbb{N}_0} = \{q^n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$, где $q > 1$.

Для любого $t \in \mathbb{T}$ функции скачка вперед и скачка назад определяются соотношениями

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \colon s > t\} \qquad \text{и} \qquad \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \colon s < t\}$$

соответственно. Если $\sigma(t) = t$ ($\rho(t) = t$), то точка $t \in \mathbb{T}$ называется плотной справа (слева), если $\sigma(t) > t$ ($\rho(t) < t$), то точка $t \in \mathbb{T}$ называется рассеяной справа (слева). При этом предполагается, что $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ (т. е. $\sigma(t) = t$, если $\mathbb{T}$ содержит максимальный элемент t) и $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$ (т. е. $\rho(t) = t$, если $\mathbb{T}$ содержит минимальный элемент t). Наряду с множеством $\mathbb{T}$ применяется множество $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$. Если $\mathbb{T}$ содержит рассеяный слева максимум m, то $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \{m\}$, в остальных случаях $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Расстояние от произвольного элемента $t \in \mathbb{T}$ до его последователя называется зернистостью временной шкалы $\mathbb{T}$ и определяется формулой $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\sigma(t) = t$ и $\mu(t) = 0$, если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ и $\mu(t) = 1$.

Функция $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой в точке $t \in \mathbb{T}^k$, если существует такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует W-окрестность точки $t \in \mathbb{T}^k$, такая что выполняется неравенство $|[f(\sigma(t)) - f(s)] - \gamma[\sigma(t) - s]| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$ при всех $s \in W$. В этом случае обозначается $f^{\Delta} = \gamma$.

Если функция $f(t)$ является Δ-дифференцируемой при любом $t \in \mathbb{T}^k$, то $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^k$.

Если функции f, g Δ-дифференцируемы в точке $t \in \mathbb{T}^k$, то верны следующие утверждения:

1) сумма $f+g$ Δ-дифференцируема в точке t и $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$;

2) для любой постоянной $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(t)$ Δ-дифференцируема в точке t и $\alpha f^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$;

3) произведение fg Δ-дифференцируемо в точке t и $(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$;

4) $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$.

Заметим, что если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $f^{\Delta}(t) = f'(t)$, что является эйлеровой производной функции $f(t)$, и если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$, т.е. получаем первую разность для функции $f(t)$.

Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ является rd-непрерывной, если она непрерывна в плотных справа точках на $\mathbb{T}$ и существует конечный левосторонний предел в плотных слева точках шкалы $\mathbb{T}$. Множество всех rd-непрерывных функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регрессивной, если $1 + \mu(t)f(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$, и положительно регрессивной, если $1 + \mu(t)f(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$.

Функция $f\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется регрессивной, если оператор $I + \mu(t)f(t,\cdot)$ при всех $t \in \mathbb{T}^k$ обратим. Тут $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — единичный оператор.

Множество всех rd-непрерывных и регрессивных функций $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{R}$. Определим функцию (ср. [4])

$$\beta_k(t) = \begin{cases} \mu^{-1}(t) \log|1 + \mu(t)k(t)|, & \text{если} \quad \mu(t) > 0, \\ k(t), & \text{если} \quad \mu(t) = 0, \end{cases}$$

где $k \in \mathcal{R}$, $t \in [t_0, +\infty)$. Здесь и далее $[a, +\infty) = \{t \in \mathbb{T}\colon a \leqslant t < +\infty\}$.

Функция $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ принадлежит K-классу, если $\psi(0) = 0$ и она непрерывна и строго возрастает на $\mathbb{R}_+$.

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется M-матрицей, если все ее внедиагональные элементы неположительные, а все главные миноры положительные.

Отображение $H\colon \mathbb{R}^n\colon \to \mathbb{R}^n$ называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначное, непрерывно отображает множество само на себя и обратное отображение также непрерывно.

Кроме того, обозначим через $\|x\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$ норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $\|A\| = (\lambda_M(A^{\mathrm{T}}A))^{1/2}$ — норму матрицы $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda_m(A)$, $\lambda_M(A)$ — минимальное и максимальное собственные числа матрицы A соответственно, $|A| = \{|a_{ij}|\}$, A^{-1} — матрицу, обратную к матрице A.

Предположим, что на временной шкале $\mathbb{T}$ определена система динамических уравнений

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \qquad t_0 \in \mathbb{T}, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$, и что для задачи (1), (2) выполняются все условия существования единственного решения при всех $t \in [t_0, +\infty)$. Пусть $x(t) = x^*$ — состояние равновесия системы (1).

Определение 1.

I. *Состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (1) *называется устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_1 \in \mathbb{T}$ *существует постоянная* $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ *такая, что из условия* $\|x_1 - x^*\| < \delta$ *следует оценка* $\|x(t; t_1, x_1) - x^*\| < \varepsilon$ *при всех* $t \in [t_1, +\infty)$. *Если величина* δ *не зависит от* t_1, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (1) *равномерно устойчиво.*

II. *Если состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (1) *равномерно устойчиво и существует постоянная* $\delta_1 > 0$ *такая, что для любого* $t_1 \in \mathbb{T}$ *из условия* $\|x_1 - x^*\| < \delta_1$ *следует, что* $\lim\limits_{t\to+\infty} \|x(t; t_1, x_1) - x^*\| = 0$, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

III. *Состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (1) *называется экспоненциально устойчивым, если существуют постоянные* $\delta_2 > 0$, $\lambda > 0$ *такие, что для любого* $t_1 \in [t_0, +\infty)$ *существует постоянная* $N = N(t_1) > 0$ *такая, что из условия* $\|x(t_1) - x^*\| < \delta_2$ *следует оценка* $\|x(t; t_1, x_1) - x^*\| \leqslant Ne^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_1) - x^*\|$ *при всех* $t \in [t_1, +\infty)$. *Если величина* N *не зависит от* t_1, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (1) *равномерно экспоненциально устойчиво.*

Нейронная сеть на временной шкале. Рассмотрим нейронную сеть на временной шкале, динамика которой описывается уравнениями вида

$$x^{\Delta}(t) = -Bx(t) + Ts(x(t)) + J, \qquad t \in [0, +\infty). \tag{3}$$

Решение $x(t; t_0, x_0)$ при $t = t_0$ принимает значение x_0, т. е.

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \qquad t_0 \in [0, +\infty), \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ — произвольная временная шкала, $0 \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = +\infty$. В системе (3) $x^{\Delta}(t)$ — Δ-производная на временной шкале $\mathbb{T}$, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ характеризует состояние нейронов, $T = \{t_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, компоненты t_{ij} описывают взаимодействие между i-м и j-м нейронами, $s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $s(x) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \ldots, s_n(x_n))^{\mathrm{T}}$, функция s_i описывает ответ i-го нейрона, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = \operatorname{diag}\{b_i\}$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $J \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор внешнего входа.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $x^{\Delta} = d/dt$ и начальная задача (3), (4) эквивалентна начальной задаче для непрерывной нейронной системы типа Хопфилда [5]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Bx(t) + Ts(x(t)) + J, \qquad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0, \qquad t_0 \geqslant 0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, то $x^{\Delta}(k) = x(k+1) - x(k) = \Delta x(k)$ и начальная задача (3), (4) эквивалентна следующей:

$$\Delta x(k) = -Bx(k) + Ts(x(k)) + J, \qquad t \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

$$x(k_0; k_0, x_0) = x_0, \qquad k_0 \in \mathbb{N}_0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Относительно системы (3) сделаем следующие предположения.

S_1. Вектор-функция $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ является регрессивной.

S_2. Существуют положительные постоянные $M_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $|s_i(u)| \leqslant M_i$ при всех $u \in \mathbb{R}$.

S_3. Существуют положительные постоянные $L_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что $|s_i(u) - s_i(v)| \leqslant L_i|u - v|$ при всех u, $v \in \mathbb{R}$.

S_4. Функция зернистости временной шкалы $0 < \mu(t) \in \mathcal{M}$ при всех $t \in [0, +\infty)$, где $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — компактное множество.

Из теоремы 8.24 работы [6] следует, что если выполняются условия S_1–S_3, то задача (3), (4) при любых $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ имеет точно одно решение на интервале $[t_0, +\infty)$.

Анализ устойчивости состояния равновесия. Обозначим $\Lambda = \operatorname{diag}\{L_i\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} M_j|T_{ij}| + |J_i|\right)^2/b_i^2\right)^{1/2}$, $\underline{b} = \min\limits_i\{b_i\}$, $\overline{b} = \max\limits_i\{b_i\}$, $L = \max\limits_i\{L_i\}$. В работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если для системы* (3) *выполняются условия* $S_1 - S_3$, *то существует состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (3) *и при этом* $\|x^*\| \leqslant r$. *Если, кроме того, матрица* $B\Lambda^{-1} - |T|$ *является* M*-матрицей, то это состояние равновесия единственно.*

Теорема 2. *Предположим, что для системы* (3) *выполняются предположения* $S_1 - S_4$ *на временной шкале* $\mathbb{T}$ *и существует постоянная* $\mu^* \in \mathcal{M}$ *такая, что* $\mu(t) \leqslant \mu^*$ *при всех* $t \in [0, +\infty)$. *Если выполняется неравенство*

$$2\underline{b} - 2L\|T\| - \mu^*(\overline{b} + L\|T\|)^2 \geqslant 0,$$

то состояние равновесия $x(t) = x^*$ *системы* (3) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) для системы (3) *на временной шкале* $\mathbb{T}$ *имеют место предположения* $S_1 - S_4$;

2) функции $s_i \in C^2(\mathbb{R})$ *и существуют постоянные* $K_i > 0$ *такие, что* $|s_i''(u)| \leqslant K_i$ *при всех* $u \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

3) существует постоянная $\mu^* \in \mathcal{M}$ *такая, что* $\mu(t) \leqslant \mu^*$ *при всех* $t \in [0, +\infty)$;

4) существует положительно определенная симметрическая матрица $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *такая, что выполняется неравенство* $\lambda_M(PB_1 + B_1^TP) + \mu^*\|P\|\|B_1\|^2 < 0$, *где* $B_1 = -B + TG$, $G = \operatorname{diag}\{s_i'(0)\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Тогда состояние равновесия $x(t) = x^*$ *системы* (3) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) для системы (3) *имеют место предположения* $S_1 - S_3$;

2) функции $s_i \in C^2(\mathbb{R})$ *и существуют постоянные* $K_i > 0$ *такие, что* $|s_i''(u)| \leqslant K_i$ *при всех* $u \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

3) существует положительно определенная симметрическая матрица $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и существует постоянная* $M > 0$ *такие, что* $|1 + \mu(t)A(t)| \geqslant M$ *при всех* $t \in [t_0, +\infty)$, *где* $B_1 = -B + TG$, $G = \operatorname{diag}\{s_i'(0)\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A(t) = \lambda_M(PB_1 + B_1^TP) + \mu(t)\|P\|\|B_1\|^2$.

Тогда:

4) если $\lim\sup\limits_{t\to+\infty} \beta_A(\tau) = q < 0$, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (3) *экспоненциально устойчиво;*

5) если $\sup\{\beta_A(t)\colon t \in [0, +\infty)\} = \overline{q} < 0$, *то состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (3) *равномерно экспоненциально устойчиво.*

Замечание 1. Рассмотрим шкалу $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ ($\mu(t) \equiv 1$). Начальная задача (3), (4) в этом случае будет эквивалентна задаче (7), (8) и условие равномерной асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (3), полученное в теореме 2, при $\mu^* = 1$ примет вид

$$2\underline{b} - 2L\|T\| - (\overline{b} + L\|T\|)^2 \geqslant 0.$$

Этот результат полностью совпадает со следующим для дискретной системы (8).

Теорема 5. *Пусть для нейронной дискретной системы* (8) *выполнены предположения* $\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_3$. *Тогда состояние равновесия* $x(t) = x^*$ *системы* (8) *будет равномерно асимптотически устойчиво при условии, что*

$$2\underline{b} - 2L\|T\| - (\overline{b} + L\|T\|)^2 \geqslant 0.$$

Теорема 6. *Пусть выполнено предположение* S_3. *Если при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{T}$ *матрица* $C = (I - \mu(t)B)\Lambda^{-1} - \mu(t)|T|$ *является* M*-матрицей, то функция* $f(x) = -Bx + Ts(x) + J$ *регрессивна.*

Численный пример. На временной шкале

$$\mathbb{P}_{1,b} = \bigcup_{j=0}^{\infty} [j(1+b), j(1+b)+1], \qquad b > 0,$$

рассмотрим двухкомпонентную нейронную сеть

$$\begin{aligned} x_1^{\Delta} &= -b_1 x_1 + t_{11} s(x_2) + t_{12} s(x_2) + i_1, \\ x_2^{\Delta} &= -b_2 x_1 + t_{21} s(x_1) + t_{22} s(x_2) + i_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 = b_2 = 1$, $T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, $s(u) = \operatorname{th} u$. Для временной шкалы $\mathbb{P}_{1,b}$ функция зернистости

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} [j(1+b), j(1+b)+1), \\ b, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \{j(1+b)+1\}. \end{cases}$$

Выбрав матрицу $P = \operatorname{diag}\{0{,}5; 0{,}5\}$ получим функцию

$$\beta_A(t) = \begin{cases} b^{-1} \log|1 + b(-0{,}9 + 0{,}53b)|, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \{j(1+b)+1\}, \\ -0{,}9 + 0{,}53b, & t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} [j(1+b), j(1+b)+1), \end{cases}$$

и условие регрессивности в виде неравенств

$$\begin{cases} 1 - 1{,}1b > 0, \\ (1 - 1{,}1b)^2 - 0{,}25b^2 > 0. \end{cases}$$

При $0 < b < 0{,}625$ выполнены все условия теорем 1, 4 и 6. Система (9) имеет единственное состояние равновесия при любых $i_1,\ i_2 \in \mathbb{R}$ и это состояние равновесия равномерно экспоненциально устойчиво.

Следует отметить, что все достаточные условия устойчивости получены нами в предположении, что функция зернистости ограничена. Вопрос же об устойчивости нейронной сети при неограниченной функции зернистости все еще остается открытым и нуждается в дальнейшем изучении.

1. *Wang K., Michel A. N.* Robustness and perturbation analysis of a class of artifical neural networks // Neural networks. – 1994. – **7**. – P. 251–259.
2. *Feng Z., Michel A. N.* Robustness analysis of a class of discrete-time systems with applications to neural networks // Nonlinear dynamics and systems theory. – 2003. – **3**, No 1. – P. 75–86.
3. *Бохнер М., Мартынюк А. А.* Элементы теории устойчивости А. М. Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 9. – С. 3–27.
4. *Мартынюк А. А.* Об экспоненциальной устойчивости на временной шкале // Докл. АН. – 2008. – **421**, № 3. – С. 312–317.
5. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1984. – **81**. – P. 3088–3092.
6. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 358 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 06.05.2009

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk, T. A. Lukyanova**

On the stability of a neural network on the time scale

The sufficient conditions of uniform asymptotic, exponential, and uniform exponential stabilities for the neural systems on the time scale are obtained. The sufficient conditions of regressivity of system's function and the existence of unique equilibrium are given.