



УДК 519.63.4.001.57+517.54

© 2010

А. Я. Бомба, В. І. Гаврилук,  
член-кореспондент НАН України В. В. Скопецький

## Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах з вільними межами

*Розроблений новий алгоритм числового розв'язання обернених крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах з вільними межами.*

У роботах [1–4] для побудови динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного роду профілів з одночасним знаходженням інших характеристик (витрат, величин перетоків тощо) розроблений метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень). Зокрема, у роботах [2–4] проведено математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища, в [1] розглядається випадок поєднання методів фіктивних областей та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач для розрахунку фільтраційних режимів у середовищах з вільними ділянками границь (кривими депресії) та проміжками типу “височування”. Нижче пропонується алгоритм чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах — криволінійних чотирикутних областях, обмежених двома еквіпотенціальними лініями та двома лініями течії, коли однією з ділянок границі є невідома (вільна) крива.

**Постановка задачі.** Розглянемо процес типу “фільтрація” у деякій криволінійній області  $G_z = ABC_*D$  ( $ABC_*D \in \widetilde{ABCD}$ ) з вільною кривою  $BC_0$  та проміжком типу “височування”  $C_1C_0$  (рис. 1, а), наприклад, за умов:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_{11}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa_{21}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \\ & \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{DC_1} = \varphi^*, \quad \varphi'_n|_{BC_0} = \varphi'_n|_{AD} = 0, \quad h|_{BC_0C_1} = g(y), \end{aligned}$$

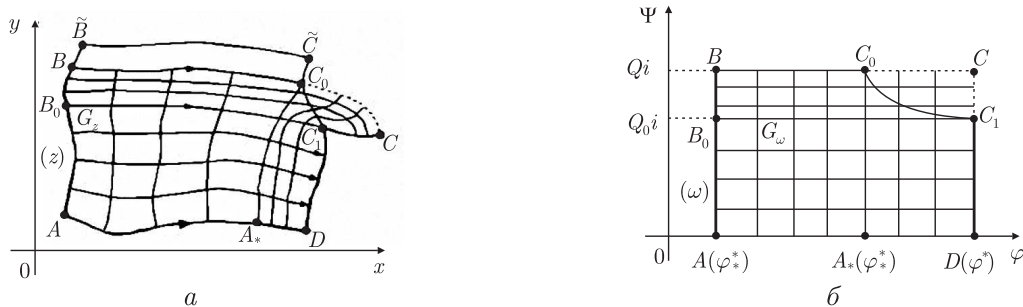


Рис. 1. Область фільтрації  $G_z$  з вільною кривою і проміжком височування (а) та відповідна їй область квазікомплексного квазіпотенціалу  $G_\omega$  (б)

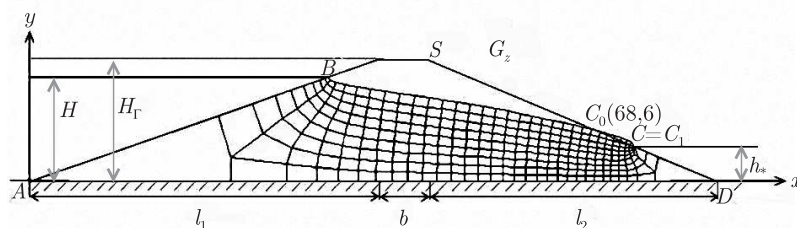


Рис. 2. Гідродинамічна сітка

де перше рівняння є наслідком рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa \text{grad } h$  (закон Дарсі) та рівняння нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$ ;  $\kappa = (\kappa_{rs})_{r,s=1,2}$ ,  $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y, \varphi, \psi)$  — обмежені неперервно-диференційовані в області  $G_z$  функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій;  $\vec{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$  — швидкість фільтрації;  $h = h(x, y)$  — напір в точці  $(x, y)$ ;  $\varphi = \varphi(x, y)$  — квазіпотенціал поля;  $g(y)$  — обмежена неперервно-диференційована функція;  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Для простоти викладення розглянемо даний процес для випадку греблі. Відповідну фізичну область фільтрації  $G_z(z = x + iy)$  (аналогічно [1-3]) зображено на рис. 2, де  $AB = \{z: m_1 y - x = 0, 0 \leq x \leq l_1\}$ ;  $SD = \{z: m_2 y + x - l_1 - b - l_2 = 0\}$ ;  $DA = \{z: y = 0, 0 \leq x \leq l_1 + b + l_2\}$ ;  $C_1 D = \{z: m_2 y + x - l_1 - b - l_2 = 0, x_1 \leq x \leq l_1 + b + l_2\}$ ;  $C_1 C = \{z: y = h_*, x_1 \leq x \leq x_*\}$ ;  $BC_0 C$  — вільна (невідомо) поверхня (крива депресії);  $AD$  — непроникна основа греблі;  $H_\Gamma$  та  $H$ ,  $h_*$  — відповідно висота греблі та напори на ній;  $b$  — ширина гребеня;  $m_1 = l_1/H_\Gamma$  та  $m_2 = l_2/H_\Gamma$  — коефіцієнти закладання верхового та низового укосів;  $C_0 C_1 C$  — фіктивна ділянка розглядуваної області фільтрації,  $x_*$  — шукана абсциса точки  $C$ , при умовах:

$$h|_{BC_0 C} = h|_{BC_0 C_1} = y, \quad \varphi = 1 - \frac{h - h_*}{H - h_*}, \quad \varphi|_{AB} = 0, \quad \varphi|_{CC_1 D} = 1,$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0.$$

Задача на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  розглядуваної області  $G_z$  на відповідну область квазікомплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega: 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q\}$  ( $\psi = \psi(x, y)$  — функція течії квазікомплексно спряжена до  $\varphi = \varphi(x, y)$ )

з невідомим параметром — повною питомою витратою  $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$  матиме вигляд [3, 4]

$$\begin{cases} \kappa_{11}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \kappa_{21}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = 0, \quad \varphi|_{CC_1D} = 1, \quad \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (2)$$

Запишемо обернену до (1), (2) задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $Q$

$$\begin{cases} \kappa_{11}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa_{21}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} m_1 y(0, \psi) - x(0, \psi) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ m_2 y(1, \psi) + x(1, \psi) - l_1 - b - l_2 = 0, & 0 \leq \psi \leq Q_1, \\ y(1, \psi) = h_*, & Q_1 \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, Q) = h_* + (1 - \varphi)^*(H - h_*), & 0 \leq \varphi \leq 1, \\ y(\varphi, 0) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Для простоти викладок розглянемо випадок, коли  $\kappa_{rs} = \kappa_{rs}(x, y)$ . Тоді відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  у дивергентній формі мають вигляд [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{11}(x, y) \kappa_{22}(x, y) - \kappa_{21}(x, y) \kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\kappa_{21}(x, y)}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{11}(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\kappa_{11}(x, y) \kappa_{22}(x, y) - \kappa_{21}(x, y) \kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\kappa_{12}(x, y)}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\kappa_{21}(x, y)}{\kappa_{22}(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов “квазіконформної подібності в малому” відповідних чотирикутників у відповідній рівномірній сітковій області  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j): \varphi_i = \Delta\varphi i, i = \overline{0, m+1}; \psi_j = \Delta\psi j, j = \overline{0, n+1}; \Delta\varphi = 1/m+1, \Delta\psi = Q/n+1, \gamma = \Delta\varphi/\Delta\psi, m, n \in \mathbf{N}\}$  запишемо у вигляді [3, 4]

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma(\hat{a}_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1} - (\hat{a}_{i+1,j+1} + \hat{a}_{i,j+1})x_{i,j+1} + \hat{a}_{i,j+1}x_{i-1,j+1}) + \\
+ (1 - 2\sigma)(\hat{a}_{i+1,j}x_{i+1,j} - (\hat{a}_{i+1,j} + \hat{a}_{i,j})x_{i,j} + \hat{a}_{i,j}x_{i-1,j}) + \\
+ \sigma(\hat{a}_{i+1,j-1}x_{i+1,j-1} - (\hat{a}_{i+1,j-1} + \hat{a}_{i,j-1})x_{i,j-1} + \hat{a}_{i,j-1}x_{i-1,j-1}) + \\
+ \gamma^2(\sigma(\hat{b}_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1} - (\hat{b}_{i+1,j+1} + \hat{b}_{i+1,j})x_{i+1,j} + \hat{b}_{i+1,j}x_{i+1,j-1}) + \\
+ (1 - 2\sigma)(\hat{b}_{i,j+1}x_{i,j+1} - (\hat{b}_{i,j+1} + \hat{b}_{i,j})x_{i,j} + \hat{b}_{i,j}x_{i,j-1}) + \\
+ \sigma(\hat{b}_{i-1,j+1}x_{i-1,j+1} - (\hat{b}_{i-1,j+1} + \hat{b}_{i-1,j})x_{i-1,j} + \hat{b}_{i-1,j}x_{i-1,j-1})) + \\
+ \gamma(\hat{c}_{i+1,j}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) - \hat{c}_{i-1,j}(x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}) - \\
- \hat{d}_{i,j+1}(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}) + \hat{d}_{i,j-1}(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}))/4 = 0, \\
\sigma(\check{a}_{i+1,j+1}y_{i+1,j+1} - (\check{a}_{i+1,j+1} + \check{a}_{i,j+1})y_{i,j+1} + \check{a}_{i,j+1}y_{i-1,j+1}) + \\
+ (1 - 2\sigma)(\check{a}_{i+1,j}y_{i+1,j} - (\check{a}_{i+1,j} + \check{a}_{i,j})y_{i,j} + \check{a}_{i,j}y_{i-1,j}) + \\
+ \sigma(\check{a}_{i+1,j-1}y_{i+1,j-1} - (\check{a}_{i+1,j-1} + \check{a}_{i,j-1})y_{i,j-1} + \check{a}_{i,j-1}y_{i-1,j-1}) + \\
+ \gamma^2(\sigma(\check{b}_{i+1,j+1}y_{i+1,j+1} - (\check{b}_{i+1,j+1} + \check{b}_{i+1,j})y_{i+1,j} + \check{b}_{i+1,j}y_{i+1,j-1}) + \\
+ (1 - 2\sigma)(\check{b}_{i,j+1}y_{i,j+1} - (\check{b}_{i,j+1} + \check{b}_{i,j})y_{i,j} + \check{b}_{i,j}y_{i,j-1}) + \\
+ \sigma(\check{b}_{i-1,j+1}y_{i-1,j+1} - (\check{b}_{i-1,j+1} + \check{b}_{i-1,j})y_{i-1,j} + \check{b}_{i-1,j}y_{i-1,j-1})) + \\
+ \gamma(-\check{c}_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + \check{c}_{i-1,j}(y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}) + \\
+ \check{d}_{i,j+1}(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}) - \check{d}_{i,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}))/4 = 0, \\
i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n};
\end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_1 y_{0,j} - x_{0,j} = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\
m_2 y_{m+1,j} + x_{m+1,j} - l_1 - b - l_2 = 0, \quad j = \overline{0, n_0}, \\
y_{m+1,j} = h_*, \quad j = \overline{n_0, n+1}, \\
y_{i,n+1} = h_* + (H - h_*)(1 - \varphi_i), \quad i = \overline{0, m+1}, \\
y_{i,0} = 0, \quad i = \overline{0, m+1};
\end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
(y_{1,j} - y_{0,j}) + m_1(x_{1,j} - x_{0,j}) = \\
= \sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{10,j}}, \quad j = \overline{0, n+1}, \\
(x_{i,n} - x_{i,n+1})(x_{i-1,n+1} - x_{i,n+1}) + (y_{i,n} - y_{i,n+1})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) = \\
= \sqrt{(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1})^2 + (x_{i,n+1} - x_{i-1,n+1})^2} \times \\
\times \sqrt{(x_{i,n} - x_{i,n+1})^2 + (y_{i,n} - y_{i,n+1})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{2i,n+1}}, \quad i = \overline{0, m+1}, \\
-(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + m_2(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = \sqrt{1 + m_2^2} \times \\
\times \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{3m+1,j}}, \quad j = \overline{0, n_0}, \\
(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{3m+1,j}}, \\
j = \overline{n_0, n+1}, \\
(x_{i,1} - x_{i,0}) = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i,0})^2 + (y_{i,1} - y_{i,0})^2} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_{4i,0}}, \quad i = \overline{0, m+1};
\end{array} \right. \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \times \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{a_{i,j} + a_{i+1,j}}, \quad (9)$$

$$a_{i,j} = \sqrt{(\kappa_{11}^{ij}(y_{i,j+1}-y_{i,j}) - \kappa_{12}^{ij}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2 + (\kappa_{21}^{ij}(y_{i,j+1}-y_{i,j}) - \kappa_{22}^{ij}(x_{i,j+1}-x_{i,j}))^2},$$

де

$$\kappa_{rs}^{ij} = \kappa_{rs}(x_{i,j}, y_{i,j}), \quad \hat{a}_{i,j} = ac\left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{11}}\right), \quad \hat{b}_{i,j} = bd\left(\frac{\kappa_{i,j}^{11}\kappa_{i,j}^{22} - \kappa_{i,j}^{21}\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{11}}\right),$$

$$\hat{c}_{i,j} = ac\left(\frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{11}}\right), \quad \hat{d}_{i,j} = bd\left(\frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{11}}\right), \quad \check{a}_{i,j} = ac\left(\frac{1}{\kappa_{i,j}^{22}}\right),$$

$$\check{b}_{i,j} = bd\left(\frac{\kappa_{i,j}^{11}\kappa_{i,j}^{22} - \kappa_{i,j}^{21}\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}}\right), \quad \check{c}_{i,j} = ac\left(\frac{\kappa_{i,j}^{21}}{\kappa_{i,j}^{22}}\right), \quad \check{d}_{i,j} = bd\left(\frac{\kappa_{i,j}^{12}}{\kappa_{i,j}^{22}}\right),$$

$$ac(k_{i,j}) = k_{i-0,5,j}, \quad ac(k_{i,j}) = \frac{k_{i,j} + k_{i-1,j}}{2}, \quad ac(k_{i,j}) = \frac{2k_{i,j}k_{i-1,j}}{k_{i,j} + k_{i-1,j}},$$

$$bd(k_{i,j}) = k_{i,j-0,5}, \quad bd(k_{i,j}) = \frac{k_{i,j} + k_{i,j-1}}{2}, \quad bd(k_{i,j}) = \frac{2k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}},$$

$$\cos \Theta_1 = \frac{\kappa_{11} - (\kappa_{12} + \kappa_{21})m_1 + \kappa_{22}m_1^2}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{(-\kappa_{11} + \kappa_{12}m_1)^2 + (-\kappa_{21} + \kappa_{22}m_1)^2}}, \quad j = \overline{0, n+1};$$

$$\cos \Theta_3 = \frac{\kappa_{11} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})m_2 + \kappa_{22}m_2^2}{\sqrt{1 + m_2^2}\sqrt{(\kappa_{11} + \kappa_{12}m_2)^2 + (\kappa_{21} + \kappa_{22}m_2)^2}}, \quad j = \overline{0, n_0};$$

$$\cos \Theta_3 = \frac{\kappa_{22}}{\sqrt{\kappa_{12} + \kappa_{22}}}, \quad j = \overline{n_0, n+1};$$

$$\begin{aligned} \cos \Theta_2 = & \left( \kappa_{11}(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1})^2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21})(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1})(x_{i,n+1} - x_{i-1,n+1}) + \right. \\ & \left. + \kappa_{22}(x_{i,n+1} - x_{i-1,n+1})^2 \right) / \left( (\kappa_{11}(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) + \kappa_{12}(x_{i,n+1} - x_{i-1,n+1}))^2 + \right. \\ & \left. + (\kappa_{21}(y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1}) + \kappa_{22}(x_{i,n+1} - x_{i-1,n+1}))^2 \right)^{1/2} \times \\ & \times \left( (y_{i-1,n+1} - y_{i,n+1})^2 + (x_{i,n+1} - x_{i-1,n+1})^2 \right)^{1/2}, \quad i = \overline{0, m+1}; \end{aligned}$$

$$\cos \Theta_4 = \frac{\kappa_{22}}{\sqrt{\kappa_{12} + \kappa_{22}}}, \quad i = \overline{0, m+1}.$$

Алгоритм наближення розв'язку даної задачі в загальному випадку будуємо шляхом поетапної параметризації ("почергового заморожування") параметра  $\gamma$  (або витрати  $Q$ ), граничних та внутрішніх вузлів сітки  $G_z^{\gamma}$  [5] з використанням ідей методу блочної ітерації (див., наприклад, [4]) для обґрунтування його збіжності. Задавши кількість вузлів розбиття сітки  $m$  та  $n$ , параметр  $\varepsilon_1$ , що характеризує точність роботи алгоритму розв'язання відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}$ ,  $y_{0,j}^{(0)}$ ,

$x_{m+1,j}^{(0)}, y_{m+1,j}^{(0)}, x_{i,n+1}^{(0)}, y_{i,n+1}^{(0)}, x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}$  (так, щоб виконувалися рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ . Початкове наближення квазіконформного інваріанта  $\gamma$  знаходимо за формулою (9), в якій використовуємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ .

Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$  ( $k = 0, 1, \dots$  — номер кроку ітерації) за допомогою ітераційного методу Зейделя [5] за формулами, отриманими шляхом розв'язання (6) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$  (для прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу та на основі ідей методу блочної ітерації [5] використаємо лише перший ітераційний крок); величини  $\gamma$  за формулами (9) та витрати  $Q$  за формулою  $Q = \frac{1}{\gamma} \frac{n+1}{m+1}$ ; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8), де в (7)  $\varphi_i$ , що відповідає “фіктивній області”, визначається з умови  $\varphi_i^{k+1} = \varphi_i(x_{i,j}^{k+1}, y_{i,j}^{k+1})|_{m_2 y_{i,j}^{k+1} + x_{i,j}^{k+1} - l_1 - b - l_2 = 0}$ . Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\begin{aligned} \max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left( |x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}| \right) < \varepsilon, \\ |Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon, \quad |D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j})^2}} -$$

усереднене значення відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області  $G_z^\gamma$ .

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т. д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку квазіконформності отриманої сітки за формулою  $\varepsilon_* = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ , де  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  — нев'язки апроксимацій рівнянь (3):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \max_{i,j=1}^{m,n} |x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - \gamma(\kappa_{11}^{ij}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{12}^{ij}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}))|, \\ \varepsilon_y = \max_{i,j=1}^{m,n} |y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - \gamma(\kappa_{21}^{ij}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) + \kappa_{22}^{ij}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}))|. \end{cases}$$

У випадку, коли не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), узгоджуємо співвідношення між точністю  $\varepsilon_*$  та заданою кількістю кроків розбиття  $m, n$  (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку  $\varepsilon_*$ ), то збільшуємо параметри розбиття  $m$  і  $n$  та розв'язуємо різницеву задачу (6)–(9) заново. Оптимальність співвідношення між  $m$  і  $n$  досягається аналогічно [5] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана.

**Результати числового розрахунку. Висновки і зауваження.** Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при розбитті області фільтрації  $m \times n = 30 \times 8$ , точності наближення  $\varepsilon = 10^{-5}$ , конструктивних параметрах греблі  $H = 12$  м,  $H_\Gamma = 14$  м,  $h_* = 4$  м,  $l_1 = 42$  м,  $b = 6$  м,  $l_2 = 35$  м, коефіцієнтах фільтрації  $\kappa_{11} = 1 + 0,01x$ ,  $\kappa_{12} = 0$ ,  $\kappa_{21} = 0$ ,  $\kappa_{22} = 1 - 0,01x$ , за  $k = 4562$  кроків отримуємо гідродинамічну сітку руху (див. рис. 2.),

знаходимо повну фільтраційну витрату  $Q = 0,1833 \text{ м}^3/\text{добу}$  (за максимальної нев'язки  $\varepsilon_* = 4,0E-3$ ) та встановлюємо проміжок височування  $C_0C_1$  (що на 57% менше відповідного випадку для однорідного середовища, при  $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$ ,  $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$ ).

Описані вище алгоритми чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазиконформні відображення реалізовані у вигляді пакетів програм для ПК IBM PC/AT. Обґрунтування побудованого нами алгоритму почергового “замороження” шуканих параметра квазиконформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, як і в [1–4], проводилось із використанням ідей методу блочної ітерації.

Використання такого підходу до розв'язання задач на квазиконформні відображення в анізотропних середовищах з вільними межами дозволяє встановлювати динаміку зміни положення кривої депресії, визначити ступінь деформаційних процесів у масиві низової призми та прогнозувати їх наслідки для роботи греблі. Зокрема, на основі числових розрахунків встановлено, що поворот осей еліпса анізотропії навіть на незначний кут (близько  $5^\circ$ ) призводить до підвищення положення вільної кривої до 15%.

1. Бомба А. Я., Гаврилюк В. И., Скопецкий В. В. Метод “фиктивных областей” и квазиконформных отображений решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С. 91–101.
2. Бомба А. Я., Гаврилюк В. И. Модифікація алгоритму числового розв'язання обернених задач на квазіконформні відображення для випадку областей з вільними межами // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2008. – № 833. – С. 39–46.
3. Бомба А. Я., Капитан С. С. Нелінійні обернення крайових задач на квазиконформні відображення в анізотропних середовищах // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 182–195.
4. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецкий В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.

*Рівненський державний гуманітарний університет  
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова  
НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 25.06.2009*

**A. Ya. Bomba, V. I. Gavrilyuk,**  
Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Scopecky**

### **Nonlinear inversions of the boundary-value problems on quasiconformal mappings in anisotropic media with free borders**

*We have designed a new algorithm of the numerical solution of inverse nonlinear boundary-value problems on quasiconformal mappings in anisotropic media with free borders.*