



УДК 539.3

© 2010

В. А. Декрет

## Про дослідження стійкості композитних матеріалів, армованих періодичними рядами нанотрубок

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

*Досліджується стійкість композитного матеріалу, армованого періодичним рядом нанотрубок, із застосуванням моделі “волокон скінченних розмірів” в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл за допомогою моделі кусково-однорідного середовища. Досліджено залежність величини критичної деформації в наповнювачі та матриці від геометричних параметрів композита та виконано порівняння отриманих результатів за цими двома критеріями.*

Дослідження композитних матеріалів, армованих нанотрубками, що мають великі значення модуля пружності та високу міцність при деформаціях, становить значний науковий та практичний інтерес. Одним з основних механізмів руйнування під дією стискуючого навантаження таких нанокомпозитів, які можна віднести до класу волокнистих композитних матеріалів, є втрата стійкості наповнювача в структурі матеріалу. Найбільш точні та фізично коректні результати в теорії стійкості волокнистих композитних матеріалів при стисканні отримані за допомогою основних співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (наприклад, [1]) та моделі кусково-однорідного середовища. Ідея застосування такого підходу для дослідження нанокомпозитів вперше запропонована в роботі [2] та отримала подальший розвиток в [3–6]. Слід відзначити, що переважну більшість результатів в рамках такого підходу одержано для волокнистих матеріалів на основі моделі нескінченнодовгих волокон (infinite fibers), коли наповнювач моделюється нескінченнодовгими в напрямку навантаження циліндрами кругового поперечного перерізу. Сучасний аналіз результатів таких досліджень наведено в [1, 7, 8] та ін. Лише в останні роки були отримані результати в рамках підходу на основі моделі волокон скінченних розмірів (short fibers) [9–11]. Порівняльний аналіз цих результатів (infinite fibers, short fibers) подано в роботі [12]. Необхідно відзначити, що результати порівняльного аналізу для моделей нескінченнодовгих волокон та волокон скінченних розмірів істотно залежать від величин, за якими здійснюється порівняння. Так, в роботі [12] такий аналіз проведено для величин  $|\varepsilon_{11}^{кр^a}|$ . У випадку моделі нескінченнодовгих волокон  $\varepsilon_{11}^{кр^a}$  відповідає критичному значенню

деформації вздовж осі  $Ox_1$  як для армуючих елементів, так і для матриці. У випадку моделі волокон скінченних розмірів введена така величина:

$$\varepsilon_{11}^{\text{кр}^a} = \varepsilon_{11}^{\text{кр}^a}(x_1, x_2) \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0. \quad (1)$$

У цьому випадку величина (1) відповідає критичному значенню деформації вздовж осі  $Ox_1$  в середній точці армуючого елемента (волокна). Для моделі волокон скінченних розмірів величина (1) характеризує тільки критичне значення деформації вздовж осі  $Ox_1$  для волокна і не характеризує критичне значення деформації для матриці, що може мати суттєво інші значення.

У роботах [9, 10], де наводяться результати дослідження втрати стійкості композитних матеріалів, армованих періодичними рядами коротких волокон в рамках моделі волокон скінченних розмірів, застосовувалася величина критичної деформації для матриці “на нескінченності”

$$|\varepsilon_{11}^{\text{кр}^m}|^\infty = |\varepsilon_{11}^{\text{кр}^m}| \quad \text{при} \quad x_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (2)$$

У зв’язку з вищенаведеним становить інтерес дослідження залежності величини критичної деформації  $\varepsilon_{11}^{\text{кр}^a}$  від механічних та геометричних параметрів компонентів стосовно композитних матеріалів, армованих періодичними рядами коротких волокон.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу стійкості композитного матеріалу, армованого періодичним рядом послідовно розміщених коротких волокон, під дією стискуючого навантаження, направленою вздовж волокон. Вказана постановка виникає при дослідженні волокнистих композитних матеріалів регулярної структури, що складаються із окремих рядів послідовно розміщених коротких волокон, причому в межах одного ряду волокна розміщені досить щільно, а окремі ряди волокон — на достатній відстані один від одного. Проведемо дослідження явища внутрішньої нестійкості в умовах плоскої деформації, яке не пов’язано із впливом граничних поверхонь, в зв’язку з чим матрицю та ряд волокон можна вважати нескінченним, крім того, будемо розглядати лише періодичні вздовж напрямку навантаження форми втрати стійкості.

Таким чином, в декартових координатах  $x_1Ox_2$  композитний матеріал моделюється нескінченною матрицею, наповненою нескінченним періодичним рядом коротких волокон, що направлені вздовж осі  $Ox_1$ . На нескінченності композит навантажений вздовж осі  $Ox_1$ , стискуючим навантаженням постійної інтенсивності  $P$  (рис. 1).

Для постановки задачі виділимо прямокутний фрагмент композитного матеріалу, що задовольняє умови періодичності структури композита. Ширина розрахункової області визначається з умови періодичності  $l_1 = L + r$ , де  $L$  — довжина включення;  $r$  — відстань між сусідніми волокнами (див. рис. 1); висота розрахункової області визначається з умови затухання збурень, що задовольняє умову  $l_2 \gg D$  та визначається в результаті обчислювального експерименту.

Композитний матеріал моделюємо кусково-однорідним середовищем, коли матеріал в межах компонента композита вважається однорідним та виконуються контактні умови на межі компонентів. Компоненти композита будемо вважати лінійно пружними та ізотропними.

Дослідження стійкості виконаємо із застосуванням статичного методу тривимірної лінеаризованої теорії стійкості [1]. Необхідно відзначити, що в рамках моделі волокон скінченних розмірів приходимо до задачі стійкості волокнистих матеріалів з неоднорідним докритичним станом, що визначається в результаті розв’язання відповідної задачі про концентрацію напружень в околі волокон.

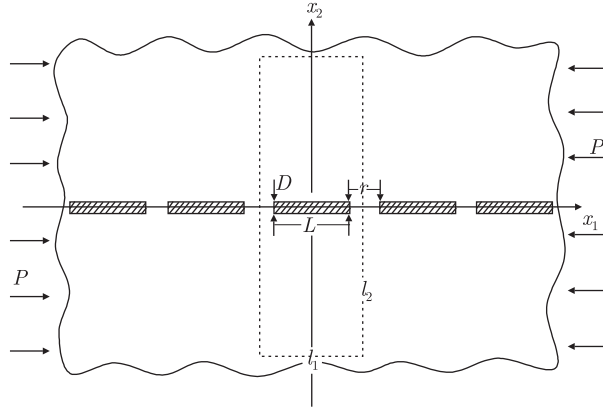


Рис. 1

Таким чином, дослідження докритичного стану виконується в рамках класичної лінійної теорії стійкості ізотропного тіла, для якої рівняння рівноваги та співвідношення пружності запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij}^0 &= 0; \\ \sigma_{ij}^0 &= \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{nn}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}^0, \\ 2\varepsilon_{ij}^0 &= \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для переходу у виразах (3) до матриці та наповнювача необхідно всі величини в (3) позначити відповідними індексами “ $m$ ” і “ $a$ ”. Оскільки для матриці, згідно з розрахунковою схемою на рис. 1, дослідження виконується для нескінченної області, то напруження і переміщення в матриці зручно подати у вигляді суми

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{0m} &= \sigma_{ij}^\infty + \sigma_{ij}^{10m}; \\ u_j^{0m} &= u_j^\infty + u_j^{10m}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\sigma_{ij}^\infty$  і  $u_j^\infty$  відповідають зовнішньому навантаженню  $P$  (рис. 1), заданому для матриці “на нескінченності”;  $\sigma_{ij}^{10m}$  і  $u_j^{10m}$  відповідають збуренням напружено-деформованого стану, зумовленим наявністю волокна скінченних розмірів. Зауважимо, що величини з індексами “ $\infty$ ” та “ $1$ ” також визначаються співвідношеннями (3). Величини  $\sigma_{ij}^\infty$  та  $u_j^\infty$  у відповідності до розрахункової схеми на рис. 1 обчислюють так:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^\infty &= -P; & \sigma_{22}^\infty &= 0; & \sigma_{12}^\infty &= 0; \\ u_1^\infty &= A_1 x_1; & u_2^\infty &= A_2 x_2, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $A_1$  і  $A_2$  визначаються із другого виразу (3) з урахуванням перших трьох виразів (5).

Таким чином, для матриці отримаємо вирази (3) (величини  $\sigma_{ij}^{10m}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{10m}$  та  $u_j^{10m}$ , постійні  $\lambda_m$  та  $\mu_m$ ) і для волокна отримаємо вирази (3) (величини  $\sigma_{ij}^{0a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{0a}$  та  $u_j^{0a}$ , постійні  $\lambda_a$  та  $\mu_a$ ). Отже, дослідження докритичного стану проводиться із застосуванням вищенаведених величин та основних співвідношень (3).

Повне формулювання задач також включає умови неперервності векторів напружень та переміщень на границях розділу, які для розрахункової схеми на рис. 1 подамо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^\infty + \sigma_{11}^{10^m} &= \sigma_{11}^{0^a}, & \sigma_{12}^{10^m} &= \sigma_{12}^{0^a}, & u_1^\infty + u_1^{10^m} &= u_1^{0^a}, & u_2^\infty + u_2^{10^m} &= u_2^{0^a} \\ \text{при } x_1 &= \pm \frac{L}{2} & \text{та } |x_2| &\leq \pm \frac{D}{2}; \\ \sigma_{22}^{10^m} &= \sigma_{22}^{0^a}, & \sigma_{12}^{10^m} &= \sigma_{12}^{0^a}, & u_1^\infty + u_1^{10^m} &= u_1^{0^a}, & u_2^\infty + u_2^{10^m} &= u_2^{0^a} \\ \text{при } |x_1| &\leq \pm \frac{L}{2} & \text{та } x_2 &= \pm \frac{D}{2}; \end{aligned} \quad (6)$$

граничні умови та умови згасання збурень на границі розрахункової області

$$\begin{aligned} u_1^{10^m} &= px_1, & \sigma_{12}^{10^m} &= 0, & \text{при } x_1 &= \pm \frac{l_1}{2}; \\ u_i^\infty &\rightarrow 0, & \sigma_{ij}^\infty &\rightarrow 0, & \text{при } x_2 &= \pm \frac{l_2}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вищенаведена постановка задачі щодо визначення докритичного стану відповідає загальноприйнятому підходу при дослідженні задач концентрації напружень в околі отворів та включень.

Після визначення докритичного стану для розрахункової схеми, наведеної на рис. 1, дослідження задачі стійкості проводитимемо в рамках другого варіанту теорії малих докритичних деформацій [1] при моделюванні матриці та волокон лінійно-пружними ізотропними тілами, що узгоджено з постановкою задачі визначення докритичного стану. Таким чином, мають місце основні співвідношення у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha \right) = 0; \quad i, j, \alpha, \beta = 1, 2. \quad (8)$$

В цьому випадку компоненти несиметричного тензора напружень для задачі стійкості запишемо

$$t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha. \quad (9)$$

Відзначимо, що (8) і (9) подано в загальному вигляді для матриці та наповнювача. При дослідженні задачі стійкості основні співвідношення (8) і (9) слід застосувати окремо для матриці, записавши їх стосовно величин  $\sigma_{ij}^{1^m}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{1^m}$  і  $u_j^{1^m}$ , а також  $\omega_{ij\alpha\beta}^{1^m}$ ,  $\lambda_m$  і  $\mu_m$ . Ці співвідношення слід окремо застосувати для волокна, записавши їх стосовно величин  $\sigma_{ij}^a$ ,  $\varepsilon_{ij}^a$  і  $u_j^a$ , а також  $\omega_{ij\alpha\beta}^a$ ,  $\lambda_a$  і  $\mu_a$ . Отже, мають місце такі вирази для матриці:

$$\omega_{ij\alpha\beta}^{1^m} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\lambda_m + (\delta_{i\beta}\delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha}\delta_{\beta j})\mu_m + \delta_{\alpha j}\sigma_{i\beta}^{0^m}; \quad \sigma_{i\beta}^{0^m} = -\delta_{i\beta}\sigma_{\beta\beta}^0 P + \sigma_{i\beta}^{1^m} \quad (10)$$

і для волокна:

$$\omega_{ij\alpha\beta}^a = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\lambda_a + (\delta_{i\beta}\delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha}\delta_{\beta j})\mu_a + \delta_{\alpha j}\sigma_{i\beta}^{0^a}. \quad (11)$$

Повне формулювання задачі стійкості із застосуванням основних співвідношень у вигляді (8) і (9) з урахуванням (10) для матриці та (11) для волокна скінченних розмірів також включають умови неперервності векторів напружень та переміщень на границях розділу, які для розрахункової схеми на рис. 1 подамо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 t_{11}^{1m} &= t_{11}^a, & t_{12}^{1m} &= t_{12}^a, & u_1^{1m} &= u_1^a, & u_2^{1m} &= u_2^a \\
 \text{при } x_1 &= \pm \frac{L}{2} & \text{та } |x_2| &\leq \pm \frac{D}{2}; \\
 t_{22}^{1m} &= t_{22}^a, & t_{21}^{1m} &= t_{21}^a, & u_1^{1m} &= u_1^a, & u_2^{1m} &= u_2^a \\
 \text{при } |x_1| &\leq \pm \frac{L}{2} & \text{та } x_1 &= \pm \frac{D}{2},
 \end{aligned} \tag{12}$$

та умови затухання збурень на границі розрахункової області для матриці

$$u_j^{1m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_1 = \pm \frac{l_1}{2} \quad \text{та} \quad x_2 = \pm \frac{l_2}{2}. \tag{13}$$

Сформульована задача стійкості (10)–(13) включає рівняння (8), коефіцієнти яких залежать від двох змінних  $x_1$  та  $x_2$ , оскільки, внаслідок позначень (10) і (11), в ці коефіцієнти входять величини  $\sigma_{i\beta}^{10m}$  та  $\sigma_{i\beta}^{0a}$ , що визначаються в результаті розв'язання відповідної задачі про концентрацію напружень докритичного стану.

Очевидно, виконати розв'язання поставлених задач аналітичними методами неможливо; в зв'язку з цим для розв'язання задачі визначення докритичного стану та задачі стійкості застосовуються чисельні методи, як описано в [9–11].

Отримані результати дослідження наведені у вигляді залежності величини (1) від геометричних параметрів композита. Для моделі волокон скінченних розмірів величина (1) відповідає критичному значенню деформації вздовж осі  $Ox_1$  в середній точці армуючого елемента (волокна). Отже, для моделі волокон скінченних розмірів величина (1) характеризує тільки критичне значення деформації вздовж осі  $Ox_1$  для волокна і не характеризує критичне значення деформації для матриці. Розрахунки виконані для таких значень параметрів компонентів композита: відношення модулів Юнга  $E_a E_m^{-1} = 1000$ ; коефіцієнти Пуассона  $\nu_1 = \nu_2$ ; геометричні параметри волокна  $LD^{-1} = 100, 200, 300, 500$ . Безрозмірна відстань між волокнами  $r^* = rL^{-1}$  послідовно змінюється в інтервалі  $0,2 \leq r^* \leq 4,5$ .

На рис. 2 показано залежність величини критичної деформації  $|\varepsilon_{11}^{кр^a}|$  від геометричних параметрів наповнювача  $LD^{-1}$  для деяких значень  $r^* = 0,2; 1; 4$  (криві 1, 2, 3 відповідно). Для порівняння, на рис. 3 показано залежність величини критичної деформації  $|\varepsilon_{11}^{кр^m}|$  (для матриці “на нескінченності”) від геометричних параметрів наповнювача  $LD^{-1}$  для деяких значень  $r^* = 0,2; 1; 4$  (криві 1, 2, 3 відповідно).

Таким чином, результати дослідження стійкості композитного матеріалу, армованого періодичним рядом послідовно розміщених коротких волокон (нанотрубок), при стисканні вздовж напрямку армування для моделі волокон скінченних розмірів істотно залежать від вибраних величин, для яких виконується аналіз. Так, при обчисленні критичної деформації  $|\varepsilon_{11}^{кр^a}|$  в середній точці армуючого елемента (волокна) були отримані значно менші значення, ніж для матриці, оскільки матриця значно менш жорстка порівняно з волокнами. При цьому було встановлено, що значення критичної деформації в середній точці армуючого

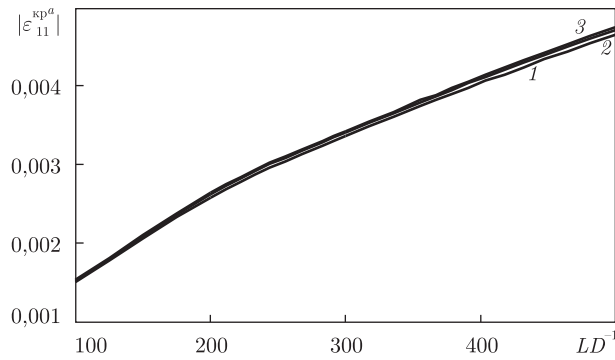


Рис. 2

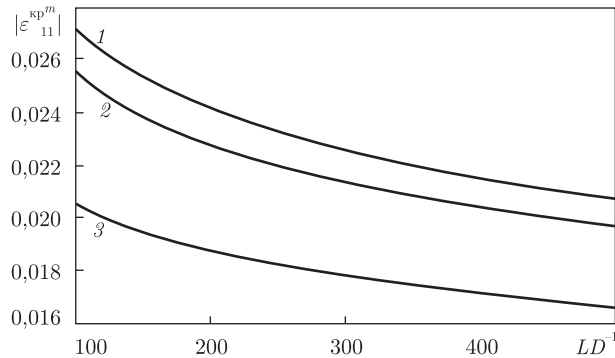


Рис. 3

елемента (волокна) (1) значно менше залежить від величини відстані між волокнами, ніж в матриці (2).

1. Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer, 1999. – 555 p.
2. Guz A. N., Rushchitsky J. J. Nanomaterials. On mechanics of nanomaterials // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No 11. – P. 1271–1293.
3. Guz A. N., Roger A. A., Guz I. A. Developing a compressive failure theory of nanocomposites // Ibid. – 2005. – **41**, No 3. – P. 233–255.
4. Guz A. N., Rushchitsky J. J., Guz I. A. Establishing fundamentals of the mechanics of nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 3. – P. 247–271.
5. Guz A. N., Rushchitsky J. J., Guz I. A. Comparative computer modeling of Carbon-polymer composites with Carbon or graphite microfibers or Carbon nanotubes // CMES. – 2008. – **26**, No 3. – P. 139–156.
6. Guz I. A., Roger A. A., Guz A. N., Rushchitsky J. J. Developing the mechanical models for nanomaterials // Composites: Part A. – 2007. – **38**. – P. 1234–1250.
7. Babich I. Yu, Guz A. N., Chekhov V. N. The three-dimensional theory of stability of fibrous and laminated materials // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, No 9. – P. 1103–1141.
8. Guz A. N. Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // Ibid. – No 1. – P. 1–37.
9. Dekret V. A. Plane instability for a composite reinforced with a periodic row of short serial fibers // Ibid. – 2006. – **42**, No 6. – P. 90–100.
10. Dekret V. A. Plane instability for a composite reinforced with a periodic row of short parallel fibers // Ibid. – 2008. – **44**, No 5. – P. 498–504.
11. Dekret V. A. Near-surface instability of composite materials weakly reinforced with short fibers // Ibid. – No 6. – P. 609–625.

12. Guz A. N., Dekret V. A. On two models in the three-dimensional theory of stability of composite materials // *Ibid.* – No 8. – P. 839–854.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 18.03.2009*

**V. A. Dekret**

**On the research of the stability of composites reinforced by periodic rows of nanotubes**

*The research of stability of a composite material reinforced by periodical rows of nanotubes with application of the “short fibers” model is presented within the framework of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies with the application of the model of piecewise-homogeneous medium. Dependence of the value of critical strain in fibers and the matrix on the geometric parameters of the composite is studied, and the comparison of the data obtained is executed by these two criteria.*