УДК 517.977

А. Г. Наконечный, Ю. К. Подлипенко, А. С. Перцов

Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Одержано новий клас систем варіаційних рівнянь, через розв'язки яких виражаються мінімаксні оцінки функціоналів від невідомих розв'язків крайових задач з граничними умовами типу Неймана для рівнянь лінійної теорії пружності.

Задачам минимаксного оценивания состояний систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных при условии их однозначной разрешимости посвящено значительное число работ (см., например, [1] и др.).

Однако в ситуации, когда решения краевых задач не определены однозначно и существуют лишь, если данные этих краевых задач удовлетворяют некоторым условиям совместности, вопросы их минимаксного оценивания разработаны недостаточно полно. Здесь известны работы [2, 3]. Исследуемая ниже задача минимаксного оценивания относится к описанному кругу проблем.

В данной работе по зашумленным наблюдениям решений и при специальных ограничениях на правые части уравнений и краевых условий, а также на шумы в наблюдениях, найдены минимаксные оценки функционалов от решений краевых задач для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана.

Нахождение минимаксных оценок сведено к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений и доказана их однозначная разрешимость.

Обозначим через H гильбертово пространство над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$. Через $J_H \in \mathcal{L}(H, H')$ будем обозначать оператор, называемый изометричным изоморфизмом, действующий из H на его сопряженное пространство H' и определяемый равенством $(u, v)_H = \langle J_H u, v\rangle_{H'\times H}$ $\forall\, u, v \in H$, де $\langle f, x\rangle_{H'\times H} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Этот оператор существует в силу теоремы Рисса.

Обозначим через $L^2(\Omega, H)$ пространство Бохнера, состоящее из случайных элементов $\xi = \xi(\omega)$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ со значениями в H таких, что $\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int\limits_\Omega \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty$. В этом случае существует интеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int\limits_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, который называется математическим ожиданием или средним случайного элемента $\xi(\omega)$. В $L^2(\Omega, H)$ можно ввести скалярное произведение

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int\limits_\Omega (\xi(\omega), \eta(\omega))_H dP(\omega) \qquad \forall\, \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \tag{1}$$

Пространство $L^2(\Omega, H)$ со скалярным произведением (1) является гильбертовым.

Введем также следующие обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — пространственная переменная, принадлежащая ограниченной открытой области $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей Γ;

$dx = dx_1 \dots dx_n$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(D)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом в области D; для целого числа m обозначим через $H^m(D)$ стандартные пространства Соболева с естественными нормами; знак “:” означает свертку тензора и вектора или тензора и тензора.

Пусть тело D — ограниченная многосвязная область с липшицевой границей в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ вектор перемещения (компоненты которого являются функциями $x \in D$) и через ϵ_{ij} — компоненты тензора деформации

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right].$$

Заметим, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_{ii}(\mathbf{u})$ и что ϵ симметричен: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Кроме того, $\epsilon(\mathbf{u}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{u} \in \mathcal{RB}$. Здесь

$$\mathcal{RB} := \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \colon \mathbf{r} = \mathbf{a} + b[x_2, -x_1]^T, & n = 2, \\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \colon \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times [x_1, x_2, x_3]^T, & n = 3 \end{array} \right\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}$ при $n = 2$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ при $n = 3$ соответственно.

Прямые вычисления показывают, что вектор $\mathbf{r}$ в (2), например при $n = 3$, определяется формулой $\mathbf{r} = R(x)\alpha$, где $\alpha = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$, а 3×6-матрица $R(x)$ имеет вид

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}_1 = [1, 0, 0]^T, & \mathbf{r}_2 = [0, 1, 0]^T, & \mathbf{r}_3 = [0, 0, 1]^T, \\ \mathbf{r}_4 = [0, -x_3, x_2]^T, & \mathbf{r}_5 = [x_3, 0, -x_1]^T, & \mathbf{r}_6 = [-x_2, x_1, 0]^T \end{array} \tag{3}$$

образуют базис подпространства $\mathcal{RB}$, так что $\dim \mathcal{RB} = 6$ при $n = 3$ и $\dim \mathcal{RB} = 3$ при $n = 2$.

Тензор напряжения определяется по формуле $\tau = \tau(\mathbf{u}) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица в $\mathbb{R}^n$, $\lambda = \lambda(x)$ ($\lambda(x) \geqslant 0$) и $\mu = \mu(x)$ ($\mu(x) > 0$) — обобщенные коэффициенты Ламе, характеризующие упругость тела, которые предполагаются кусочно-непрерывными функциями в области $\overline{D}$. Тензор напряжения τ также является симметричным.

Введем дифференциальный оператор второго порядка

$$L\mathbf{u} = -\operatorname{div} \tau(\mathbf{u}) = \left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}\delta_{ij})\right].$$

Задача Неймана в математической теории упругости формулируется следующим образом: найти вектор перемещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющий уравнениям

$$L\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad \text{в} \quad D, \quad \tau(\mathbf{u}) : \mathbf{n} = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}\mathbf{n}_j = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{4}$$

где $\mathbf{F}$ — вектор объемных сил в теле D; $\mathbf{g}$ — векторная функция, заданная на Γ; $\mathbf{n}_j$ — направляющие косинусы внешней по отношению к области D нормали $\mathbf{n}$ к ее границе Γ.

Предположим, что $\mathbf{F} \in L^2(D)^n$, $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma)^n$. Тогда под решением задачи (4) понимается нахождение функции $\mathbf{u} \in H^1(D)^n$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \langle \mathbf{F},\mathbf{v}\rangle \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{5}$$

где

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int\limits_D (2\mu\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v})\, dx, \qquad \langle \mathbf{F},\mathbf{v}\rangle = \int\limits_D (\mathbf{F},\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} dx + \int\limits_\Gamma (\mathbf{g},\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} d\Gamma,$$

$$\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n \epsilon_{ij}(\mathbf{u})\epsilon_{ij}(\mathbf{v}).$$

Решение задачи (5) не единственно и определено с точностью до произвольной функции из $\mathcal{RB}$. Оно существует тогда и только тогда, когда функции $\mathbf{F}$ и $\mathbf{g}$ удовлетворяют следующим условиям совместности (см. [4]):

$$\int\limits_D (\mathbf{F},\mathbf{r})_{\mathbb{R}^n} dx + \int\limits_\Gamma (\mathbf{g},\mathbf{r})_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0 \qquad \forall\, \mathbf{r} \in \mathcal{RB}. \tag{6}$$

Постановка задачи минимаксного оценивания. Задача оценивания состоит в том, чтобы по наблюдениям вида

$$y = C\mathbf{u} + \eta \tag{7}$$

найти оптимальную, в некотором смысле, оценку значения функционала

$$l(\mathbf{u}) = \int\limits_D (\mathbf{l}_0(x), \mathbf{u}(x))_{\mathbb{R}^3} dx$$

в классе линейных оценок $\widehat{l(\mathbf{u})} = (y(\mathbf{u};\eta), w)_{H_0} + c$, где $\mathbf{u}(x)$ — решение краевой задачи (4), элемент w принадлежит гильбертову пространству H_0, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{l}_0 \in L^2(D)^n$ — заданная функция, в предположении, что правые части $\mathbf{F}(x)$, $\mathbf{g}$ уравнений (4) и погрешности $\eta = \eta(\omega)$ в наблюдениях (7), являющиеся случайными элементами, определенными на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ со значениями в H_0, неизвестны, а известно лишь, что элемент $F := (\mathbf{F}, \mathbf{g}) \in G_0$ и $\eta \in G_1$. Здесь $C \in \mathcal{L}(L^2(D)^n, H_0)$ — линейный непрерывный оператор, такой, что его ограничение на подпространство $\mathcal{RB}$ инъективно; через G_0 обозначено множество функций $\widetilde{F} := (\widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{\mathbf{g}}) \in L^2(D)^n \times L^2(\Gamma)^n$, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_D (Q_1(\widetilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x), (\widetilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}_0)(x))^2_{\mathbb{R}^n} dx + \int\limits_\Gamma (Q_2(\widetilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0), \widetilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}_0)^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma \leqslant 1,$$

$$\int\limits_D (\widetilde{\mathbf{F}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n} dx + \int\limits_\Gamma (\widetilde{\mathbf{g}}, \mathbf{r})_{\mathbb{R}^n} d\Gamma = 0 \qquad \forall\, \mathbf{r} \in \mathcal{RB},$$

а через G_1 — множество случайных элементов $\widetilde{\eta} \in L^2(\Omega, H_0)$ с нулевыми средними, удовлетворяющими неравенству $\mathbb{E}(Q_0\widetilde{\eta}, \widetilde{\eta})_{H_0} \leqslant 1$, где Q_0, Q_1, Q_2 — ограниченные самосопряженные положительно-определенные операторы в H_0, $L^2(D)^n$, $L^2(\Gamma)^n$ соответственно, для которых существуют ограниченные обратные операторы Q_0^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, $\widetilde{\mathbf{F}}_0 \in L^2(D)^n$ и $\widetilde{\mathbf{g}}_0 \in L^2(\Gamma)^n$, заданные функции, удовлетворяющие условиям (6).

Определение 1. Оценку вида

$$\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} = (y(\mathbf{u};\eta), \widehat{w})_{H_0} + \widehat{c} \tag{8}$$

будем называть минимаксной оценкой $l(\mathbf{u})$, если элемент $\widehat{w}$ и число $\widehat{c}$ определяются из условия

$$\sigma(w,c)\colon = \sup_{(\widetilde{\mathbf{F}},\widetilde{\mathbf{g}})\in G_0, \widetilde{\eta}\in G_1} \mathbb{E}|l(\widetilde{\mathbf{u}}) - \widehat{l(\widetilde{\mathbf{u}})}|^2 \to \inf_{w\in H_0, c\in\mathbb{R}} := \sigma^2,$$

где $\widehat{l(\widetilde{\mathbf{u}})} = (\widetilde{y}, w)_{H_0} + c$, $\widetilde{y} = C\widetilde{\mathbf{u}} + \widetilde{\eta}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$ — любое решение краевой задачи (4) при $\mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{F}}$, $\mathbf{g} = \widetilde{\mathbf{g}}$. Величину σ будем называть погрешностью минимаксного оценивания выражения $l(\mathbf{u})$.

Основные результаты. Далее будут сформулированы результаты о представлении минимаксных оценок. С этой целью положим

$$U := \left\{ \widetilde{w} \in H_0\colon \int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0}\widetilde{w})(x), \mathbf{r}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0 \ \forall\, \mathbf{r} \in \mathcal{RB} \right\},$$

где $C^*\colon H_0' \to L_2(D)^n$ — оператор, сопряженный к C, который определяется соотношением

$$\langle C\boldsymbol{\varphi}, \phi\rangle_{H_0\times H_0'} = \int_D (\boldsymbol{\varphi}(x), C^*\phi(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx$$

для всех $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(D)^n$, $\phi \in H_0'$, и при каждом фиксированном $w \in U$ введем функцию $\mathbf{z}(\cdot; w) \in H^1(D)^n$ как единственное решение следующей вариационной задачи[1]:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}(\cdot; w)) = \int_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} w)(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{9}$$

$$\int_D (Q_1^{-1}\mathbf{z}(x; w), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\mathbf{z}(\cdot; w)), \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \qquad i = \overline{1,6}. \tag{10}$$

Однозначная разрешимость этой задачи вытекает из того, что правые части уравнений (9), (10) удовлетворяют условию совместности, поскольку $w \in U$.

Лемма 1. *Задача нахождения минимаксной оценки значения функционала $l(\mathbf{u})$ эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой вариационной краевой задачей (9), (10) с функцией стоимости вида*

$$I(w) = \int_D (Q_1^{-1}\mathbf{z}(x; w), \mathbf{z}(x; w))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int_\Gamma (Q_2^{-1}\mathbf{z}(\cdot; w), \mathbf{z}(\cdot; w))_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma + \\ + (Q_0^{-1} w, w)_{H_0} \to \inf_{w\in U}. \tag{11}$$

[1] Нетрудно видеть, что U — непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Доказано, что решение задачи оптимального управления (9)–(11) и, значит, нахождение минимаксной оценки (8) сводится к решению некоторой системы интегро-дифференциальных уравнений. А именно, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Существует единственная минимаксная оценка выражения $l(\mathbf{u})$, которая может быть представлена в виде $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} = (y(\mathbf{u},\eta),\widehat{w})_{H_0} + \widehat{c}$, где*

$$\widehat{w} = Q_0C\mathbf{p}, \qquad \widehat{c} = \int\limits_D (\widehat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\,dx + \int\limits_\Gamma (\widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\,d\Gamma, \tag{12}$$

а функции $\mathbf{p} \in H^1(D)^n$ и $\widehat{\mathbf{z}} \in H^1(D)^n$ определяются из системы интегро-дифференциальных уравнений

$$a(\mathbf{v},\widehat{\mathbf{z}}) = \int\limits_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^*J_{H_0}Q_0C\mathbf{p})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{13}$$

$$\int\limits_D (Q_1^{-1}\widehat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1}\widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma = 0, \qquad i = \overline{1,6}, \tag{14}$$

$$a(\mathbf{p},\mathbf{w}) = \int\limits_D (Q_1^{-1}\widehat{\mathbf{z}}(x), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1}\widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma, \qquad \forall\, \mathbf{w} \in H^1(D)^n, \tag{15}$$

$$\int\limits_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^*J_{H_0}Q_0C\mathbf{p})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx = 0, \qquad i = \overline{1,6}. \tag{16}$$

Задача (13)–(16) *однозначно разрешима. Погрешность оценивания σ определяется формулой $\sigma = l(\mathbf{p})^{1/2}$.*

Отметим, что функция $\widehat{\mathbf{z}}(x) = \mathbf{z}(x;\widehat{w})$, где $\mathbf{z}(x;w)$ является решением задачи (9), (10), а $w = \widehat{w} \in U$ — оптимальное управление системой, описываемой этими уравнениями с критерием качества (11) (см. лемму 1).

Альтернативное представление для минимаксной оценки через решение системы интегро-дифференциальных уравнений специального вида, не зависящее от конкретного вида функционала l, получено в следующей теореме.

Теорема 2. *Минимаксная оценка выражения $l(\mathbf{u})$ имеет вид $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} = l(\widehat{\mathbf{u}})$, где функция $\widehat{\mathbf{u}}(x) = \widehat{\mathbf{u}}(x,\omega)$ определяется из решения следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:*

$$a(\mathbf{v},\widehat{\mathbf{p}}) = \int\limits_D (C^*J_{H_0}Q_0(y - C\widehat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(D)^n, \tag{17}$$

$$\int\limits_D (Q_1^{-1}\widehat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1}\widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma = 0, \qquad i = \overline{1,6}, \tag{18}$$

$$a(\widehat{\mathbf{u}},\mathbf{w}) = \int\limits_D (Q_1^{-1}\widehat{\mathbf{p}}(x), \mathbf{w}(x))_{\mathbb{R}^3}\,dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1}\widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}\,d\Gamma, \qquad \forall\, \mathbf{w} \in H^1(D)^n, \tag{19}$$

$$\int\limits_D (C^*J_{H_0}Q_0(y - C\widehat{\mathbf{u}})(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx = 0, \qquad i = \overline{1,6}, \tag{20}$$

в которой равенства (17)–(20) *выполняются с вероятностью* 1. *Случайные поля, реализации* $\widehat{\mathbf{p}}$ *и* $\widehat{\mathbf{u}}$ *которых удовлетворяют задаче* (17)–(20), *принадлежат пространству* $L^2(\Omega, H^1(D)^n)$. *Задача* (17)–(20) *однозначно разрешима.*

В заключение введем понятие приближенной минимаксной оценки величины $l(\mathbf{u})$, нахождение которой сводится к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений, и сформулируем теорему о сходимости последовательности таких оценок к точной минимаксной оценке $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}}$ в среднем квадратическом.

Учитывая, что пространство $V = H^1(D)^n$ сепарабельно и разлагается в прямую сумму

$$V = V^{\perp} \oplus \operatorname{Ker} L, \qquad V^{\perp} = (\operatorname{Ker} L)^{\perp},$$

где $\operatorname{Ker} L = \mathcal{RB}$, базис $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, \ldots$ в нем можно выбрать таким образом, чтобы векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_6$ определялись соотношениями (3).

Положим

$$\widehat{\mathbf{z}}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{p}_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{r}_i,$$

где $m > 6$, а α_i и β_i определяются из системы уравнений

$$a(\mathbf{r}_i, \widehat{\mathbf{z}}_m) = \int\limits_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} Q_0 C \mathbf{p}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx \qquad i = \overline{1, m}, \tag{21}$$

$$\int\limits_D (Q_1^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \qquad i = \overline{1, 6}, \tag{22}$$

$$a(\mathbf{p}_m, \mathbf{r}_i) = \int\limits_D (Q_1^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1} \widehat{\mathbf{z}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{23}$$

$$\int\limits_D (\mathbf{l}_0(x) - (C^* J_{H_0} Q_0 C \mathbf{p}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx = 0, \qquad i = \overline{1, 6}. \tag{24}$$

Отметим, что задача (21)–(24) однозначно разрешима и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α_i и β_i.

В качестве приближенной минимаксной оценки величины $l(\mathbf{u})$ возьмем выражение

$$\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} = (y, \widehat{w}_m)_{H_0} + \widehat{c}_m,$$

где $\widehat{w}_m := Q_0 C \mathbf{p}_m$, $\widehat{c}_m := \int\limits_D (\widehat{\mathbf{z}}_m(x), \mathbf{F}_0(x))_{\mathbf{R}^n}\, dx + \int\limits_\Gamma (\widehat{\mathbf{z}}_m, \mathbf{g}_0)_{\mathbf{R}^n}\, d\Gamma$.

Можно также показать, что $\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} = l(\widehat{\mathbf{u}}_m(\cdot, \omega))$, где функция $\widehat{\mathbf{u}}_m = \widehat{\mathbf{u}}_m(\cdot, \omega)$ определяется из системы уравнений

$$a(\mathbf{r}_i, \widehat{\mathbf{p}}_m) = \int\limits_D (C^* J_{H_0} Q_0 (y - C \widehat{\mathbf{u}}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^3}\, dx, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{25}$$

$$\int\limits_D (Q_1^{-1} \widehat{\mathbf{p}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n}\, dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1} \widehat{\mathbf{p}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n}\, d\Gamma = 0, \qquad i = \overline{1, 6}, \tag{26}$$

$$a(\widehat{\mathbf{u}}_m, \mathbf{r}_i) = \int\limits_D (Q_1^{-1}\widehat{\mathbf{p}}_m(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^3} dx + \int\limits_\Gamma (Q_2^{-1}\widehat{\mathbf{p}}_m, \mathbf{r}_i)_{\mathbb{R}^n} d\Gamma, \qquad i = \overline{1, m}, \tag{27}$$

$$\int\limits_D (C^* J_{H_0} Q_0(y - C\widehat{\mathbf{u}}_m)(x), \mathbf{r}_i(x))_{\mathbb{R}^n} dx = 0, \qquad i = \overline{1, 6}. \tag{28}$$

Здесь функции $\widehat{\mathbf{u}}_m$ и $\widehat{\mathbf{p}}_m$ принадлежат подпространству, порожденному векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots,$ $\mathbf{r}_m$, а система (25)–(28) имеет единственное решение $\widehat{\mathbf{u}}_m(\cdot, \omega)$ и $\widehat{\mathbf{p}}_m(\cdot, \omega)$ при $m > 6$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Приближенная минимаксная оценка* $\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}}$ *выражения* $l(\mathbf{u})$ *сходится к минимаксной оценке* $\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}}$ *этого выражения в том смысле, что* $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbb{E}|\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} - \widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}}|^2 = 0$, *при этом*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}|\widehat{\widehat{l_m(\mathbf{u})}} - l(\mathbf{u})|^2 = \mathbb{E}|\widehat{\widehat{l(\mathbf{u})}} - l(\mathbf{u})|^2.$$

Таким образом, для систем, описываемых краевыми задачами для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана при сформулированных выше ограничениях на параметры этих задач получены представления для минимаксных оценок функционалов от решений этих задач и погрешностей оценивания через решения однозначно разрешимых систем интегро-дифференциальных уравнений специального вида. Установлена сходимость приближенных минимаксных оценок, полученных в результате применения метода Галеркина для численного решения этих систем интегро-дифференциальных уравнений, к точным.

Методика и результаты работы могут быть использованы в дальнейших теоретических и прикладных исследованиях процессов в теории упругости, а также при использовании системного анализа этих процессов.

1. *Наконечный А. Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: Изд-во Киев. гос. ун-та, 1985. – 82 с.
2. *Подлипенко Ю. К., Грищук Н. В.* Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – № 2. – С. 104–128.
3. *Подлипенко Ю. К., Перцов А. С.* Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармоничного рівняння з граничними умовами типа Неймана // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 153–160.
4. *Toselli A., Widlund O.* Domain decomposition methods – algorithms and theory. – Berlin, etc.: Springer, 1972. – 450 p.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 30.06.09

A. G. Nakonechny, Yu. K. Podlipenko, A. S. Pertsov

Minimax estimation of solutions to the boundary-value problems with Neumann-type boundary conditions for the equations of linear elasticity

We obtain a new class of systems of variational equations, via whose solutions the minimax estimates of functionals of unknown solutions to the boundary-value problems with Neumann-type boundary conditions for the equations of linear elasticity are expressed.