УДК 537.871.3

А. А. Сидорчук, В. Г. Теребус

Магнітне поле довільної системи прямолінійних паралельних струмів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Знайдено аналітичні розв'язки для диференціальних рівнянь магнітних силових ліній довільної системи прямолінійних паралельних струмів.

З фізики відомо, що з точністю до довільного множника, який залежить від вибору системи одиниць вимірювання, вектор магнітного поля прямолінійного струму визначається формулою (в скалярному варіанті представленою В. Р. Смайтом, 1954, с. 275):

$$\vec{B} = \frac{\vec{I} \times \vec{R}}{R^2},$$

де $\vec{B}$ — вектор магнітної індукції; $\vec{I}$ — вектор струму; $\vec{R}$ — радіус-вектор точки, де шукається поле.

Поле довільної системи прямолінійних струмів визначатиметься адитивною сумою векторів поля кожного зі струмів. В декартовій системі координат компоненти вектора поля такої системи струмів можна записати у вигляді:

$$\vec{B} = (B_x, B_y), \quad B_x = -\sum_{i=1}^{N} \frac{I_i(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad B_y = \sum_{i=1}^{N} \frac{I_i(x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \tag{1}$$

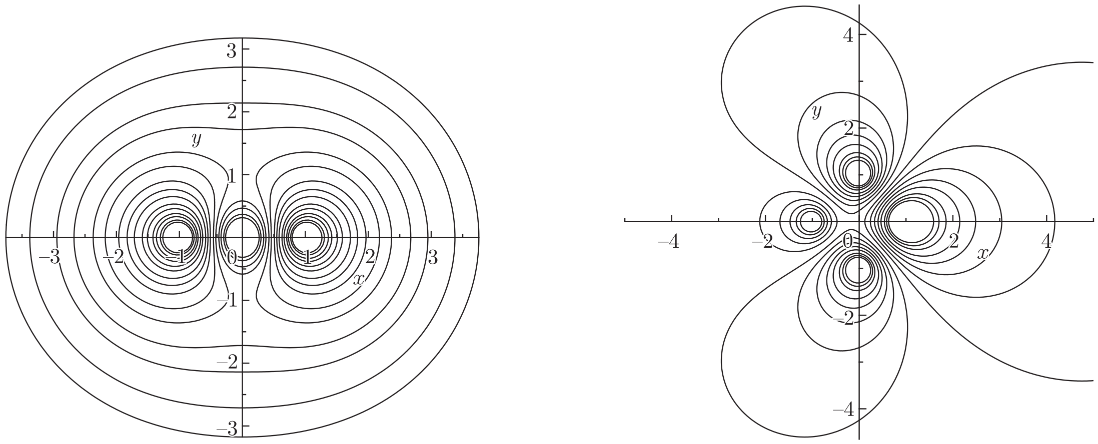
Тут N — число струмів; (x_i, y_i) — координати струмів, а (x, y) — координати точки, в якій визначається поле. В полярній системі координат вирази для компонент магнітного поля будуть такими:

$$\begin{gathered} B_x = -\sum_{i=1}^{N} \frac{I_i(r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)}{(r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)^2 + (r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)^2}, \\ B_y = \sum_{i=1}^{N} \frac{I_i(r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)}{(r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)^2 + (r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)^2}, \end{gathered} \tag{2}$$

де (r_i, φ_i) — координати струмів.

За визначенням, рівнянню магнітних силових ліній відповідає умова дотичності кожної силової лінії до вектора магнітного поля. Це приводить до диференціальних рівнянь магнітних силових ліній довільного числа прямих паралельних струмів у декартовій та полярній системах координат у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{I_i(x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{I_i(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}, \tag{3}$$



а б

Рис. 1. Зображення картини магнітного поля систем струмів: a — для конфігурації $(x_1, y_1, I_1) = (-1, 0, 1)$, $(x_2, y_2, I_2) = (0, 0, -1)$, $(x_3, y_3, I_3) = (1, 0, 1)$; $б$ — для конфігурації $(x_1, y_1, I_1) = (1, 0, 2)$, $(x_2, y_2, I_2) = (-1, 0, 1)$, $(x_3, y_3, I_3) = (0, -1, -3/2)$, $(x_4, y_4, I_4) = (0, 1, -3/2)$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\frac{F(r,\varphi)\sin\varphi + \cos\varphi}{F(r,\varphi)\cos\varphi - \sin\varphi}, \tag{4}$$

де

$$F(r,\varphi) = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{I_i(r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)}{(r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)^2 + (r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{I_i(r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)}{(r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)^2 + (r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)^2}}.$$

У відомих нам роботах, присвячених візуалізації магнітних полів, починаючи з класичного трактату Максвелла [1], використовують чисельні методи розв'язання рівняння типу (3) або (4). В довідниках аналітичних розв'язків нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (див. [2]), а також у роботах з оглядом методів побудови картини магнітного поля (див. [3]), аналітичний розв'язок рівнянь (3) та (4) не наведений. Спроби використати сучасні комп'ютерні технології, які здатні розв'язувати в аналітичній формі нелінійні звичайні диференціальні рівняння [4], також не приводять до успіху для рівнянь типу (3) та (4).

Нами отримано загальні розв'язки рівнянь (3) та (4) відповідно у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{N} I_i \ln((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) = c, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} I_i \ln((r\cos\varphi - r_i\cos\varphi_i)^2 + (r\sin\varphi - r_i\sin\varphi_i)^2) = c. \tag{6}$$

Тут c — довільна константа, яка ідентифікує конкретну магнітну силову лінію. В цьому можна переконатися безпосередньо підстановкою (5) та (6) в (3), (4) відповідно.

Загальні розв'язки (5) та (6) дозволяють значно спростити проблему візуалізації магнітних полів. На рис. 1 показані деякі приклади.

Автори висловлюють подяку проф. В. В. Козорізу за постановку задачі і корисні поради.

1. *Максвелл Дж. К.* Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 2. – Москва: Наука, 1989. – 436 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1971. – 576 с.
3. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Геометрия магнитного поля. – Москва: Атомиздат, 1963. – 264 с.
4. *http:*//www.maplesoft.com.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 01.07.2009

A. A. Sydorchuk, V. G. Terebus

The magnetic field of an arbitrary system of straight parallel currents

Analytic solutions of the differential equations for magnetic field lines of an arbitrary system of straight parallel currents are derived.