Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

2 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98,519.21

М. Ф. Городній, К. В. Лукаш

Про властивості розв'язків двопараметричної дискретної системи Вольтерра

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Отримано критерій обмеженості або сумовності зі степенем p розв'язків двопараметричної системи Вольтерра з операторними коефіцієнтами та обмеженості в середньому порядку p розв'язків її стохастичного аналога.

Формулювання основних результатів. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір; $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B у B, I — одиничний оператор у B. Покладемо при $p \in [1; \infty)$

$$l_p^2(B) := \left\{ x = \{x_{n,m}\colon n \geqslant 0, m \geqslant 0\} \subset B \mid \|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|x_{n,m}\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

а також

$$l_\infty^2(B) := \{x = \{x_{n,m}\colon n \geqslant 0, m \geqslant 0\} \subset B \mid \|x\|_\infty := \sup_{n\geqslant 0, m\geqslant 0} \|x_{n,m}\| < \infty\}.$$

Зазначимо, що для кожного $p \in [1; \infty]$ $(l_p^2(B), \|\cdot\|_p)$ — комплексний банахів простір.

Нехай $\{A_{k,j} \mid k \geqslant 0, j \geqslant 0\}$ — такий набір операторів з $L(B)$, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|A_{k,j}\| < \infty.$$

Покладемо $K^2 := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| \leqslant 1,\ |z_2| \leqslant 1\}$, і для фіксованих цілих невід'ємних чисел n, m

$$\Omega(n, m) := \{(k, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leqslant k \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant m,\ (k, j) \neq (n, m)\}.$$

Тут $\mathbb{C}$ і $\mathbb{Z}$ — множина комплексних і цілих чисел відповідно.

Справджуються такі теореми.

Теорема 1. *Якщо для кожного* $(z_1, z_2) \in K^2$ *оператор* $\mathcal{A}(z_1, z_2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{n,m} z_1^n z_2^m$ *є неперервно оборотним, то існує такий набір операторів* $\{B_{n,m} \mid n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\}$, *що* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \|B_{n,m}\| < \infty$ *і* $(\mathcal{A}(z_1, z_2))^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} B_{n,m} z_1^n z_2^m$ *для кожного* $(z_1, z_2) \in K^2$.

Теорема 2. *Нехай додатково* $A_{0,0} = I$. *Тоді нижченаведені твердження є еквівалентними:*

i_1) *для деякого* $p \in [1; \infty]$ *двопараметрична дискретна система Вольтерра*

$$u_{0,0} = t_{0,0},$$
$$u_{n,m} = -\sum_{(k,j)\in\Omega(n,m)} A_{n-k,m-j} u_{k,j} + t_{n,m}, \qquad n \geqslant 0, \qquad m \geqslant 0, \qquad (n,m) \neq (0,0),$$

має для довільного $t = \{t_{n,m} \colon n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\} \in l_p^2(B)$ *єдиний розв'язок* $u = \{u_{n,m} \colon n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\}$ *у просторі* $l_p^2(B)$;

i_2) *для кожного* $(z_1, z_2) \in K^2$ *оператор* $\mathcal{A}(z_1, z_2)$ *неперервно оборотний;*

i_3) *твердження* i_1 *виконується для кожного* $p \in [1; \infty]$.

Нехай $(\Omega, \Im, P)$ — повний імовірнісний простір, B — додатково сепарабельний простір. При фіксованому $p \in [1; \infty]$ символом $L_p(\Omega, B)$ позначимо банахів простір інтегровних за нормою зі степенем p (суттєво обмежених за нормою при $p = \infty$) B-значних випадкових елементів, визначених на Ω. Норму в $L_p(\Omega, B)$ позначатимемо $\|\cdot\|_{\Omega,p}$. Набір випадкових елементів $\{\xi_{n,m} \colon n \geqslant 0, m \geqslant 0\} \subset L_p(\Omega, B)$ назвемо обмеженим у середньому порядку p (суттєво обмеженим при $p = \infty$), якщо

$$\sup_{n\geqslant 0,\ m\geqslant 0} \|\xi_{n,m}\|_{\Omega,p} < \infty.$$

Теорема 3. *Нехай* $A_{0,0} = I$. *Наведені нижче твердження еквівалентні:*

j_1) *для деякого* $p \in [1; \infty]$ *набір випадкових елементів* $\{\eta_{n,m} \colon n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\}$, *визначений за правилом*

$$\eta_{0,0} = \xi_{0,0},$$
$$\eta_{n,m} = -\sum_{\Omega(n,m)} A_{n-k,m-j} \eta_{k,j} + \xi_{n,m}, \qquad n \geqslant 0, \qquad m \geqslant 0, \qquad (n,m) \neq (0,0),$$

є обмеженим у середньому порядку p *(суттєво обмеженим при* $p = \infty$*) для кожного обмеженого в середньому порядку* p *(суттєво обмеженого при* $p = \infty$*) набору* $\{\xi_{n,m} \colon n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\}$;

j_2) *виконується твердження* i_2 *теореми 2;*

j_3) *твердження* j_1 *виконується для кожного* $p \in [1; \infty]$.

Зазначимо, що теорема 1, яка є узагальненням теореми Вінера про абсолютно збіжні ряди Фур'є на випадок степеневих рядів з операторними коефіцієнтами, суттєво використовується для доведення теореми 2.

Для одновимірної дискретної системи Вольтерра аналогічний теоремі 2 результат отримано в роботі [1]. Про застосування дискретних систем Вольтерра див. [2, 3].

Основні моменти доведення теорем 1–3. Для доведення теореми 1 покладемо

$$F := \left\{ f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m,\ (z_1, z_2) \in K^2 \mid \{a_{n,m} \colon n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\} \subset \mathbb{C}, \right.$$

$$\left. |f| := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| < \infty \right\},$$

$$\mathcal{R} := \left\{ X(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{n,m} z_1^n z_2^m,\ (z_1, z_2) \in K^2 \mid \{T_{n,m} \colon n \geqslant 0,\ m \geqslant 0\} \subset L(B), \right.$$

$$\left. \|X\|_{\mathcal{R}} := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \|T_{n,m}\| < \infty \right\}.$$

Тоді $(F, |\cdot|)$ та $(\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$ — банахові алгебри з поточково визначеними операціями, для яких виконуються такі умови:

a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall T_1, \ldots, T_n \in L(B)\ \forall f_1, \ldots, f_n \in F$:

$$f_1 T_1 + \cdots + f_n T_n \in \mathcal{R}; \tag{1}$$

b) $\forall T \in L(B)\ \forall f \in F \colon \|fT\|_{\mathcal{R}} = |f| \cdot \|T\|$;

c) лінійні комбінації вигляду (1) утворюють скрізь щільну множину в $\mathcal{R}$;

d) якщо $X \in \mathcal{R}$, то $\|X(z_1, z_2)\| \leqslant \|X\|_{\mathcal{R}}$ для кожного $(z_1, z_2) \in K^2$.

Зафіксуємо довільний ненульовий неперервний гомоморфізм $M \colon F \to \mathbb{C}$ і доведемо, що для нього

$$\exists (\xi, \zeta) \in K^2 \quad \forall f \in F \colon \quad M(f) = f(\xi, \zeta). \tag{2}$$

Справді, для елементів $f_{1,0}(z_1, z_2) = z_1$, $f_{0,1}(z_1, z_2) = z_2$ із F покладемо $M(f_{1,0}) := \xi$, $M(f_{0,1}) := \zeta$. Тоді $M(f) = f(\xi, \zeta)$ для кожного $f \in F$ внаслідок лінійності та неперервності M. Оскільки M як лінійний неперервний функціонал має одиничну норму, то $(\xi, \zeta) \in K^2$.

Гомоморфізм M породжує такий неперервний гомоморфізм $\mathcal{M} \colon \mathcal{R} \to L(B)$, що $\mathcal{M}(fT) = TM(f)$ для довільних $T \in L(B)$, $f \in F$. Розглянемо елемент $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ такий, що $\mathcal{A}(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} z_1^n z_2^m$, $(z_1, z_2) \in K^2$. Внаслідок лінійності і неперервності $\mathcal{M}$ та зображення (2) $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \xi^n \zeta^m$, а отже, за умовою теореми 1 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ має лівий обернений оператор в $L(B)$.

Таким чином, з урахуванням умов *a*–*d* і зображення (2) згідно з теоремою 3 із [4] елемент $\mathcal{A}$ має лівий обернений в $\mathcal{R}$, який позначимо символом $\mathcal{B}$. Оскільки для кожного $(z_1, z_2) \in K^2$ оператор $\mathcal{A}(z_1, z_2)$ неперервно оборотний і його лівий обернений збігається з $\mathcal{B}(z_1, z_2)$, то елемент $\mathcal{B}$ є оберненим для $\mathcal{A}$ в $\mathcal{R}$, що завершує доведення теореми 1.

Доведення теореми 2 використовує теорему 1 і проводиться аналогічно доведенню теореми 1 роботи [1].

Правильність теореми 3 перевіряється за допомогою зведення до детермінованого випадку і застосування теореми 2. При цьому використовуються міркування, аналогічні наведеним при доведенні леми 2 з [5].

1. *Вятчанінов О. В., Городній М. Ф.* Властивості розв'язків дискретної системи Вольтерри в банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 2. – С. 184–187.
2. *Колмановський В. Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 4. – С. 42–45.
3. *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем. – Минск: Ин-т математики НАН Белоруссии, 2001. – 400 с.
4. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings // Ann. Math. – 1942. – **43**, No 3. – P. 409–418.
5. *Городній М. Ф.* Обмежені в середньому та стаціонарні розв'язки одного стохастичного різницевого рівняння // Доп. НАН України. – 2002. – № 8. – С. 12–16.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 15.05.2009

M. F. Gorodnii, K. V. Lukash

On the properties of solutions of a two-parameter discrete Volterra system

We obtain a criterion for solutions of a two-dimensional Volterra system with operator coefficients to be bounded or p-th power summable and a criterion for solutions of a system's stochastic analog to be bounded in the p-th order mean.