УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. М. Ковалев**

Выделение устойчивых переменных нелинейных систем с использованием метода дополнительных функций

Поставлена і розв'язана задача вилучення стійких змінних для нелінійної автономної системи диференціальних рівнянь із відомою функцією Ляпунова зі знакосталою похідною. Методом додаткових функцій функція Ляпунова перетворена до вигляду, який дозволяє виділити стійкі змінні та здобути інтеграл. Обмірковано зв'язок цих питань з методом в'язки інтегралів Четаєва. Розглянуто рухи твердого тіла з маховиком і гіроскопа Горячева–Чаплигіна.

На важность исследования задач устойчивости для систем с функцией Ляпунова со знакопостоянной производной одним из первых указал Н. Н. Красовский [1]. Новые возможности в решении этих задач связаны с созданием метода дополнительных функций [2–4], позволяющего преобразовать функцию Ляпунова со знакопостоянной производной таким образом, что множество обращения производной в нуль становится инвариантным [5]. Именно свойство инвариантности позволило получить новые результаты по асимптотической устойчивости [6] и неустойчивости [5].

Применение метода дополнительных функций к задачам устойчивости, выполненное в настоящей работе, показало, что устойчивые движения связаны со свойством интегрируемости системы. Подтверждением этого является и метод связки интегралов Четаева [7–9], позволяющий строить функцию Ляпунова из известных интегралов движения. С другой стороны, предлагаемый подход показывает, что при известной функции Ляпунова для устойчивых движений ее можно преобразовать к такому виду, из которого можно получить интегралы, а также частные интегралы системы в зависимости от структуры движения.

В первом пункте данной статьи ставится задача выделения устойчивых переменных для устойчивого по Ляпунову нулевого решения, как переменных, которые при неограниченном возрастании времени не стремятся к нулю. Свойствам функций Ляпунова, выделяющим устойчивые переменные, посвящен пункт 2. Существование интегралов, в том числе частных интегралов, и их получение из преобразованной функции Ляпунова рассмотрено в пункте 3. Здесь же обсуждается связь этих вопросов с методом связки интегралов Четаева. В пункте 4 на примере равновесия твердого тела с маховиком показывается процесс построения интеграла для системы, описывающей рассматриваемое движение. Изучению равновесия гироскопа Горячева–Чаплыгина посвящен пункт 5. Демонстрируется возможность получения классических интегралов, а также возможность "поднятия" частного интеграла Горячева–Чаплыгина до "полного" интеграла. Некоторые итоги представленного исследования приведены в заключении.

1. Выделение устойчивых переменных. Рассматривается устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \qquad f(0) = 0; \qquad x \in D \subset R^n, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D — некоторая окрестность нуля, функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $V(x)$ в силу системы (1): $V(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ — оператор дифференцирования; в применении к скалярной функции он дает градиент, а к вектор-функции — матрицу Якоби; символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение.

С целью более детальной характеристики движений в окрестности нулевого решения воспользуемся подходом, принятым в частичной устойчивости, и введем понятия устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых переменных.

Определение 1. Переменная $y = g(x)$ $(y \in \mathbb{R}^1)$ называется устойчивой, асимптотически устойчивой, неустойчивой, если нулевое решение системы (1) является, соответственно, устойчивым, асимптотически устойчивым, неустойчивым относительно этой переменной. Отметим, что устойчивые переменные при неограниченном возрастании времени не стремятся к нулю, оставаясь все время в заданной ограниченной области.

Рассмотрим задачу выделения устойчивых переменных для систем с известной функцией Ляпунова со знакопостоянной производной. Для исследования используем метод дополнительных функций, который был успешно применен в статье [6] для выделения асимптотически устойчивых переменных.

2. Функции Ляпунова для устойчивых переменных. Метод дополнительных функций позволяет преобразовать функцию Ляпунова со знакопостоянной производной к виду, при котором множество обращения в нуль производной является инвариантным [6]. Этот результат, содержащийся в теореме 6 работы [6], следует выделить в отдельную теорему.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *известна знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой в силу системы* (1) *является функцией знакопостоянной, знака противоположного $V(x)$. Множество обращения $\dot{V}(x)$ в нуль описывается функциями $\varphi_i(x)$, дифференцируемыми достаточное число раз; знакоопределенность $V(x)$ определяется формой конечного порядка; знакопостоянство $\dot{V}(x)$, неравенства $\varphi_i^{(j)}(x) \neq 0$ определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда добавлением дополнительных функций $V_{ai}(x)$ функция $V(x)$ приводится к виду*

$$V_f(y, z) = V_{f1}(y) + V_{f2}(y, z), \tag{2}$$

где функции $y(x)$, $z(x)$ являются достаточное число раз дифференцируемыми функциями, при этом $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\det \left. \dfrac{\partial(y, z)}{\partial x} \right|_{x=0} \neq 0$; множество $M = \{(y, z) \colon y = 0\}$ является инвариантным; функции $V_f(y, z)$, $V_{f1}(y)$, $V_{f2}(0, z)$ являются знакоопределенными; $\dot{V}_{f2}(y, z) = 0$; $\dot{V}_{f1}(y)$ является функцией знакоопределенной, знака противоположного $V_f(y, z)$.

Доказательство теоремы 1 является частью доказательств теорем 6, 7 работы [6]. С использованием преобразованной функции (2) в этих теоремах доказано, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво относительно переменной y, и это множество является максимальным, т. е. относительно оставшихся переменных z нулевое решение устойчиво неасимптотически. В принятых в данной работе терминах этот результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *известна функция Ляпунова со знакопостоянной производной. Тогда путем преобразования ее к виду* (2) *переменные разделяются на устойчивые переменные z и асимптотически устойчивые переменные y.*

3. Интегралы и метод Четаева. Вид преобразованной функции (2) и ее свойства указывают на связь задачи о выделении устойчивых переменных с существованием интегралов системы (1). Свойства функций $V_{f2}(y,z)$, $\dot{V}_{f2}(y,z)$, $V_{f2}(0,z)$, устанавливаемые теоремой 1, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть переменные системы* (1) *разделены на устойчивые переменные* z *и асимптотически устойчивые переменные* y *и построена функция Ляпунова* (2)*. Тогда у системы* (1) *существует интеграл* $V_{f2}(y,z)$*, при этом частный интеграл* $V_{f2}(0,z)$ *является знакоопределенным.*

Из данной теоремы вытекает следствие.

Следствие 1. *Все переменные системы* (1) *являются устойчивыми тогда и только тогда, когда существует знакоопределенный интеграл, который является функцией Ляпунова для нулевого решения.*

Именно для решения вопроса об устойчивости в случае, описанном в следствии 1, Н. Г. Четаев предложил метод связки интегралов [7–9] для построения функции Ляпунова. Если же в случае устойчивого решения среди переменных имеются асимптотически устойчивые, то функция Ляпунова имеет более сложный вид (2). Тем не менее, она включает в себя интеграл в качестве составной части. Таким образом, задачи исследования устойчивых решений и интегрирования динамических систем являются, в определенном смысле, обратными друг другу: зная функцию Ляпунова, можно указать интеграл и наоборот. Это означает, что результаты из одной области можно использовать при решении задач из другой области. Продемонстрируем это на двух классических задачах динамики систем твердых тел.

4. Равновесие твердого тела с маховиком. Рассмотрим движение относительно центра масс твердого тела с маховиком. Уравнения движения можно записать в форме [10]

$$(A\omega+\lambda\mathbf{e})^{\bullet}=(A\omega+\lambda\mathbf{e})\times\omega, \qquad \dot{\lambda}=-\alpha\lambda. \tag{3}$$

Здесь ω — угловая скорость тела; λ — величина кинетического момента маховика; $\mathbf{e}$ — единичный вектор направления кинетического момента маховика; A — тензор инерции системы тело–маховик; α — коэффициент усиления.

Система (3) допускает положение равновесия $\omega=0$, $\lambda=0$. Для исследования его на устойчивость в качестве функции Ляпунова примем функцию

$$V=(A\omega+\lambda\mathbf{e})^2+\lambda^2. \tag{4}$$

Для производной $\dot{V}$ имеем выражение $\dot{V}=-2\alpha\lambda^2$. Функция (4) имеет вид (2): $V=V_1(\lambda)+$ $+\,V_2(\lambda,\omega)$, где V, $V_1(\lambda)=\lambda^2$, $V_2(0,\omega)=(A\omega)^2$ — положительно определенные функции; $\dot{V}_2(\lambda,\omega)=0$; $\dot{V}_1(\lambda)$ — при $\alpha>0$ отрицательно определенная функция; множество $M=$ $=\{(\lambda,\omega)\colon \lambda=0\}$ — инвариантно. На основании теоремы 2 заключаем, что для системы (3) переменные ω_i являются устойчивыми, а переменная λ — асимптотически устойчивая.

Применяя теорему 3 к функции (4), устанавливаем, что у системы (3) существует интеграл $V_2(\lambda,\omega)=(A\omega+\lambda\mathbf{e})^2$, при этом частный интеграл $V_2(0,\omega)=(A\omega)^2$ является положительно определенным.

Таким образом, знание функции Ляпунова (4) позволило получить интеграл системы (3). С другой стороны, знание этого интеграла не приводит непосредственно к построению функции Ляпунова (например, методом Четаева), а требует дополнительных рассуждений.

5. Движение гироскопа Горячева–Чаплыгина. Движение гироскопа Горячева–Чаплыгина описывается уравнениями [11]

$$
\begin{aligned}
&4\dot p = 3qr, \qquad 4\dot q = -3pr - a\gamma_3, \qquad \dot r = a\gamma_2,\\
&\dot\gamma_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \dot\gamma_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \dot\gamma_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2,
\end{aligned} \tag{5}
$$

где p, q, r и γ_1, γ_2, γ_3 — проекции на подвижные оси, соответственно, вектора угловой скорости тела и единичного вектора вертикали; a — параметр, характеризующий распределение масс тела.

Уравнения (5) допускают интегралы

$$
\begin{aligned}
&J_1 = 4(p^2 + q^2) + r^2 - 2a\gamma_1 = c_1,\\
&J_2 = 4(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = c_2,\\
&J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned}
$$

При $c_2 = 0$ уравнения (5) допускают дополнительный интеграл [11]

$$
J_4 = r(p^2 + q^2) + ap\gamma_3 = c_4. \tag{6}
$$

Положению равновесия тела соответствуют следующие значения переменных:

$$
p_0 = q_0 = r_0 = 0, \qquad \gamma_{10} = \pm 1, \qquad \gamma_{20} = \gamma_{30} = 0. \tag{7}
$$

Для рассмотрения устойчивости решения (7) системы (5) введем возмущения

$$
p = x_1, \qquad q = x_2, \qquad r = x_3, \qquad \gamma_1 = \gamma_{10} + x_4, \qquad \gamma_2 = x_5, \qquad \gamma_3 = x_6
$$

и запишем уравнения и интегралы возмущенного движения

$$
\begin{aligned}
&4\dot x_1 = 3x_2x_3, \qquad 4\dot x_2 = -3x_1x_3 - ax_6, \qquad \dot x_3 = ax_5,\\
&\dot x_4 = x_3x_5 - x_2x_6, \qquad \dot x_5 = -\gamma_{10}x_3 + x_1x_6 - x_3x_4,\\
&\dot x_6 = \gamma_{10}x_2 + x_2x_4 - x_1x_5;
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_{p1} = -2ax_4 + 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2,\\
&J_{p2} = 4\gamma_{10}x_1 + 4(x_1x_4 + x_2x_5) + x_3x_6,\\
&J_{p3} = 2\gamma_{10}x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Постоянные интегралов (9) выбраны таким образом, чтобы в начале координат интегралы обращались в нуль.

Выберем в качестве функции Ляпунова интеграл

$$
V = \frac{\gamma_{10}}{a}[4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2] + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2. \tag{10}
$$

На основании следствия 1 заключаем, что при $a\gamma_{10} > 0$ все переменные системы (8) являются устойчивыми.

Поставим задачу получения из интеграла (10) новых интегралов. В качестве первого варианта рассмотрим две функции $V_{1s} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$, $V_{2s} = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$. Находим

$$\dot{V}_{1s} = 2\gamma_{10}(x_2x_6 - x_5x_3) = -2\gamma_{10}\dot{x}_4, \qquad \dot{V}_{2s} = 2a(x_5x_3 - x_2x_6) = 2a\dot{x}_4.$$

Отсюда следует, что функции $V_{1f} = V_{1s} + 2\gamma_{10}x_4$, $V_{2f} = V_{2s} - 2ax_4$ будут интегралами системы (8). При этом $V_{1f} = J_{p3}$, $V_{2f} = J_{p1}$ и $V = \dfrac{\gamma_{10}}{a}J_{p1} + J_{p3}$.

Еще пару интегралов можно получить, взяв одним из них J_{p2}. Тогда второй интеграл получается из формулы (10) как $J = V - J_{p2}$. В силу построения эти четыре интеграла зависимы. Независимыми являются три классических интеграла (9).

Для получения четвертого независимого интеграла можно использовать частный интеграл (6), который на инвариантном многообразии $M = \{x\colon J_{p2} = 0\}$ является независимым от известных трех интегралов (9). Однако эта задача ввиду своей сложности представляет предмет самостоятельного исследования.

Заключение. В настоящей статье предложена дальнейшая детализация свойства устойчивости путем введения устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых переменных. Такое деление переменных существенно расширяет представление о локальном поведении траекторий в окрестности изучаемого движения и будет особенно полезным при переходе к глобальному анализу движения. Рассмотрен случай устойчивого решения в предположении, что функция Ляпунова известна. Исследование основано на приведении функции Ляпунова к специальному виду, когда множество обращения производной в нуль инвариантно. Такое преобразование всегда возможно с помощью метода дополнительных функций. Специальный вид позволяет разделить переменные на устойчивые и асимптотически устойчивые, а также получить интеграл движения. В случае, когда все переменные устойчивые, существует знакоопределенный интеграл, что обосновывает применение в этой ситуации метода связки интегралов Четаева. Однако связь свойств интегрируемости и устойчивости является более сложной, что демонстрирует ситуация, когда имеются асимптотически устойчивые переменные. Вопросы существования интеграла и построения функции Ляпунова в этом случае требуют дополнительного анализа, что показывают рассмотренные механические системы.

1. *Красовский Н. Н.* Критерии, основанные на функциях Ляпунова со знакопостоянными производными. Дополнение III к монографии И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. – Москва: Наука, 1966. – С. 463–467.
2. *Ковалев А. М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
3. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 22–27.
4. *Ковалев А. М., Суйков А. С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 5–15.
5. *Ковалев А. М.* Решение задач неустойчивости с использованием метода дополнительных функций // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 21–27.
6. *Ковалев А. М.* Метод дополнительных функций в задачах частичной устойчивости // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 17–23.
7. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращательных движений снаряда // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, вып. 1. – С. 135–138.
8. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 1. – С. 457–458.

9. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – Москва: Наука, 1990. – 176 с.
10. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.
11. *Чаплыгин С. А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. (Сообщено 28 дек. 1899 г. в Моск. мат. об-ве). Собр. соч. Т. 1. Москва; Ленинград, 1948. – С. 118–124. (Изд. 1-е. – Тр. отделения физ. наук об-ва любителей естествознания. – 1901. – **10**, вып. 2. – С. 32–34).

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 27.08.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. M. Kovalev**

Selection of the stable variables of nonlinear systems by using the method of additional functions

The problem of the selection of stable variables is formulated and solved for a nonlinear autonomous system of differential equations with a known Lyapunov function with the derivative of constant sign. With the help of the method of additional functions, a Lyapunov function is transformed to select the stable variables and to obtain an integral. The connection between these questions and the Chetaev method of integrals bundles is discussed. The motions of a rigid body with rotor and a Goryachev–Chaplygin gyroscope are considered.