УДК 517+519.2

М. В. Миронюк

Об одной характеризационной теореме на дискретных абелевых группах

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Згідно з теоремою Хейде гауссів розподіл на дійсній прямій характеризується симетрією умовного розподілу однієї лінійної форми від незалежних випадкових величин при фіксованій іншій. У роботі розглядається аналог теореми Хейде для дискретних абелевих груп.

Различным характеризациям гауссовского распределения на вещественной прямой посвящено большое число исследований. В частности, следующая теорема, характеризующая гауссовское распределение симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной второй, была доказана Хейде.

Теорема Хейде [1] (см. также [2, § 13.4.1]). *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, — независимые случайные величины. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$, где α_j, β_j — отличные от нуля константы такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \neq 0$ для любых $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 симметрично, то все случайные величины ξ_j — гауссовские.*

Групповым аналогам теоремы Хейде посвящены статьи [3–6]. В настоящей работе рассматривается аналог теоремы Хейде для дискретных абелевых групп.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов X, ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_j. Пусть $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$, где α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для любых $i \neq j$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Для каких групп X из симметрии условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 вытекает, что все μ_j либо гауссовские, либо принадлежат классу распределений, который можно рассматривать как естественный аналог класса гауссовских распределений.

В такой общей постановке задача 1 к настоящему времени не решена, но она изучалась в различных важных подклассах класса локально компактных абелевых групп. В работе [3] задача 1 была полностью решена в классе конечных абелевых групп, а затем в работе [5] — в классе дискретных абелевых групп. Для этих классов групп аналогом гауссовских распределений являются идемпотентные распределения. В обоих случаях соответствующий класс групп описывается достаточно просто: группа X не должна содержать элементов порядка 2. Сформулируем теперь более общую задачу.

Задача 2. Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа. Описать возможные распределения μ_j в предположении, что условное распределение линейной формы L_2 при фиксированной L_1 симметрично.

Данная задача была решена ранее в классе конечных абелевых групп [6]. В настоящей работе мы решаем задачу 2 в классе дискретных абелевых групп, а также изучаем близкие вопросы. Отметим, что решение задачи 2 в работе [6] было основано на том, что группа автоморфизмов конечной группы также конечна. Для дискретных абелевых групп это, вообще говоря, не так, поэтому решение задачи 2 в классе дискретных абелевых групп основано на принципиально других соображениях.

Условимся о некоторых обозначениях. Для произвольной локально компактной абелевой группы X обозначим через $Y = X^*$ ее группу характеров, через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ определим сопряженный автоморфизм $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$ формулой $(x, \widetilde{\alpha}y) = (\alpha x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Тождественный автоморфизм произвольной группы будем обозначать через I. Обозначим через b_X множество всех компактных элементов группы X. Для произвольного натурального числа n положим $X^{(n)} = \{x \in X \colon x = nx', x' \in X\}$, $X_{(n)} = \{x \in X \colon nx = 0\}$. Если X — дискретная абелева группа, то для любого простого p обозначим через X_p ее p-примарную компоненту, т. е. подгруппу в X, состоящую из всех элементов, порядки которых являются степенями числа p.

Для распределения μ его характеристическую функцию обозначим через $\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y)\, d\mu(x)$. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$. Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X, а через $I(X)$ — множество идемпотентных распределений на группе X, т. е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Заметим, что характеристическая функция распределения Хаара m_K имеет вид

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, обозначим через E_x.

Основная теорема. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X — счетная дискретная абелева группа. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.*

Доказательство теоремы 1 основано на нескольких вспомогательных утверждениях общего характера.

В работе [5] была доказана теорема, решающая задачу 1 в классе дискретных абелевых групп, которую нам удобно сформулировать в следующей форме.

Лемма 1 [5]. *Пусть X — счетная дискретная абелева группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что δ, $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, то $\mu_j = E_{k_j} * m_F$, где $k_j \in X$, и F — конечная подгруппа группы X такая, что $\delta(F) = F$.*

Пусть Y — абелева группа, $f(y)$ — функция на Y, h — произвольный элемент Y. Обозначим через Δ_h оператор конечной разности

$$\Delta_h f(y) = f(y + h) - f(y).$$

Многочленом на Y называется такая функция $f(y)$, что при некотором n выполнено

$$\Delta_h^{n+1} f(y) = 0$$

для всех $y,\ h \in Y$.

Лемма 2 [7]. *Пусть Y — локально компактная абелева группа и $f(y)$ — непрерывный многочлен на Y. Тогда $f(y) = \mathrm{const}$ при $y \in b_Y$.*

Лемма 3 [4]. *Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично тогда и только тогда, когда характеристические функции распределений μ_j удовлетворяют функциональному уравнению*

$$\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u + \widetilde{\beta}_j v) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(\widetilde{\alpha}_j u - \widetilde{\beta}_j v), \qquad u, v \in Y. \tag{1}$$

Лемма 3 позволяет свести решение задач 1 и 2 к изучению решений уравнения (1) в классе характеристических функций.

Как известно, любая локально компактная абелева группа X топологически изоморфна группе вида $\mathbb{R}^m \times G$, где $m \geqslant 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу (см. [8, 24.30]).

Предложение 1 [5]. *Пусть $X = \mathbb{R}^m \times G$, где $m \geqslant 0$, а группа G содержит компактную открытую подгруппу. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geqslant 2,$ — топологические автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Тогда случайные величины ξ_j можно так заменить их сдвигами ${\xi'}_j$, что условное распределение линейной формы ${L'}_2 = \beta_1\xi'_1 + \cdots + \beta_n\xi'_n$ при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \cdots + \alpha_n\xi'_n$ симметрично, а все носители $\sigma({\mu'}_j) \subset \mathbb{R}^m \times b_G$.*

Для класса счетных дискретных абелевых групп предложение 1 может быть существенно усилено. Следующее утверждение является основой доказательства теоремы 1 и представляет самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть X — счетная дискретная абелева группа. Пусть $\alpha_j,\ \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ n \geqslant 2,$ — автоморфизмы группы X такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для всех $i \neq j$. Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично. Тогда случайные величины ξ_j можно так заменить их сдвигами ${\xi'}_j$, что условное распределение линейной формы ${L'}_2 = \beta_1\xi'_1 + \cdots + \beta_n\xi'_n$ при фиксированной $L'_1 = \alpha_1\xi'_1 + \cdots + \alpha_n\xi'_n$ симметрично, а все носители $\sigma({\mu'}_j) \subset X_{(k)}$ для некоторого $k \geqslant 2$.*

Пусть выполнены условия предложения 2. Как следует из доказательства предложения 2, распределения μ_j сосредоточены на некоторой подгруппе, порожденной $X_{(2)}$ и некоторой конечной подгруппой F. Следующее предложение показывает, что это утверждение не может быть усилено.

Предложение 3. *Пусть X — счетная дискретная абелева группа, порожденная $X_{(2)}$ и некоторой конечной группой. Предположим, что $\delta,\ I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда существуют* *такие независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X и с распределением μ, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а носитель $\sigma(\mu) = X$.*

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 линейные формы имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где δ, $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, то $\mu_j = \rho_j * m_F * E_{x_j}$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, F — конечная подгруппа, не содержащая элементов порядка 2, $x_j \in X$.

Замечание 2. Применяя предложения 1 и 2 и рассуждая также, как и при доказательстве теоремы 3 работы [6], получаем следующее утверждение. Пусть $X = \mathbb{R} \times D$, где D — счетная дискретная абелева группа. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \gamma_j * \rho_j * \pi_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(\mathbb{R})$, $\sigma(\rho_j) \subset D_2$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.

Работа выполнена при поддержке украинско-французской программы PICS 2009–2011 (НАН Украины и CNRS).

1. *Heyde C. C.* Characterization of the normal law by the symmetry of a certain conditional distribution // Sankhya. Ser. A. – 1970. – **32**. – P. 115–118.
2. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – Москва: Наука, 1972. – 656 с.
3. *Feldman G. M.* On the Heyde theorem for finite Abelian groups // J. Theor. Probab. – 2004. – **17**. – P. 929–941.
4. *Feldman G. M.* On a characterization theorem for locally compact Abelian groups // Probab. Theory Relat. Fields. – 2005. – **133**. – P. 345–357.
5. *Feldman G. M.* On the Heyde theorem for discrete Abelian groups // Studia Math. – 2006. – **177**, No 1. – P. 67–79.
6. *Миронюк М. В., Фельдман Г. М.* Об одной характеризационной теореме на конечных абелевых группах // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 2. – С. 403–415.
7. *Фельдман Г. М.* Теоремы Марцинкевича и Лукача на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**, № 2. – С. 330–339.
8. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. – Москва: Наука, 1975. – Т. 1. – 656 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 05.06.2009

M. V. Myronyuk

On a characterization theorem for discrete Abelian groups

According to the famous Heyde theorem, a Gaussian distribution on a real line is characterized by the symmetry of the conditional distribution of one linear form of independent random variables at another fixed one. An analog of the Heyde theorem for discrete Abelian groups is considered.