



УДК 621.3(0758)

© 2010

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко

## О Фурье-сингуларисном разложении несинусоидальных сигналов

*Пропонується нове Фур'є-сингуларисне розкладення несинусоїдальних функцій. Показано його застосування для електромагнітних механізмів.*

Известно, в частности из работ по гармоническому анализу [1–3], что несинусоидальные периодические и почти периодические функции, представляющие собой сумму периодических функций, можно разложить в ряд Фурье вида

$$f(t) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos \omega_m t + a_m \sin \omega_m t), \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $\omega_m$  — круговая частота ( $\omega_m = 2\pi f_m$ ,  $f_m$  — частота, Гц).

Таким рядом могут быть описаны воздействия различной физической природы (электрические, пневматические, гидравлические, механические, магнитные и т. д.). В работах [1, 2] представлены ряды Фурье для конкретных по форме сигналов: электрических в виде одно- и двухполупериодно выпрямленных синусоидальных воздействий однофазные, двухфазные и трехфазные, которые часто встречаются в различных электротехнических системах. В разложении Фурье для указанных сигналов постоянная составляющая ряда Фурье  $b_0 > 0$ . А это значит, что при подаче на вход электроцепи сигнала в виде (1) постоянная составляющая представляет собой скачкообразную функцию  $[b_0 1(t)]$ , где  $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$  — единичная скачкообразная функция, которая, согласно работам [4, 5], может быть представлена в виде сингуларисного (особого) разложения

$$b_0 1(t) = b_0(1 - e^{-\alpha t}) + b_0 e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент затухания;  $U_{a1} = 1/\pi$ ,  $U_{ak} = U_{a1}/k$ ,  $k = \omega_k/\omega_1$ ,  $\sum_{k=1}^n U_{ak} = 1$ ,  $n = 12$ .

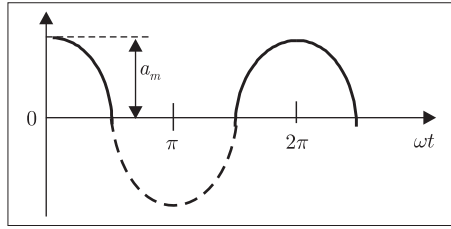


Рис. 1

С учетом сингулярисного разложения (2) сигнал, например электрический, описываемый рядом Фурье (1), будет представляться Фурье-сингулярисным разложением в виде

$$\begin{aligned}
 U(t) &= b_0 1(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos \omega_m t + a_m \sin \omega_m t) = \\
 &= b_0(1 - e^{-\alpha t}) + b_0 e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos \omega_m t + a_m \sin \omega_m t). \quad (3)
 \end{aligned}$$

При коэффициенте затухания  $\alpha = \infty$  выражение (3) принимает вид (1). Именно при входном напряжении, описываемом (3), а не (1), в электронной цепи с реактивными элементами расчетный переходный процесс тока  $i(t)$  более близок к экспериментальному, в котором имеется медленно поднимающаяся кривая тока  $i(t)$  в течение времени  $t_{\alpha} = 4,6/\alpha$ .

Далее покажем Фурье-сингулярисные разложения трех несинусоидальных сигналов, наиболее часто встречающихся в электротехнических системах. Первый сигнал изображен на рис. 1. Этот сигнал является, например, выходным напряжением однофазного однополупериодного выпрямителя. Его выражение в виде ряда Фурье следующее [2]:

$$U_1(t) = \frac{2a_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (4)$$

В этом напряжении на основе (4) видим, что присутствует скачкообразная составляющая в виде

$$\frac{a_m}{\pi} 1(t) = \frac{a_m}{\pi} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{a_m}{\pi} e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t. \quad (5)$$

С учетом (5) выражение (4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 U_1(t) &= \frac{a_m}{\pi} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{a_m}{\pi} e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t + \\
 &+ \frac{2a_m}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Второй сигнал изображен на рис. 2. Он отождествляет суммарное выходное напряжение  $U_2(t)$  двух однофазных однополупериодных выпрямителей. Выражение этого  $U_2(t)$  в виде ряда Фурье следующее [2]:

$$U_2(t) = \frac{4a_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right) = 2(4). \quad (7)$$

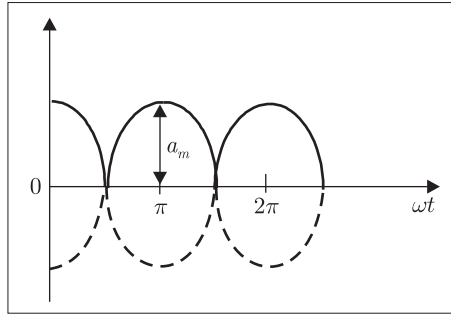


Рис. 2

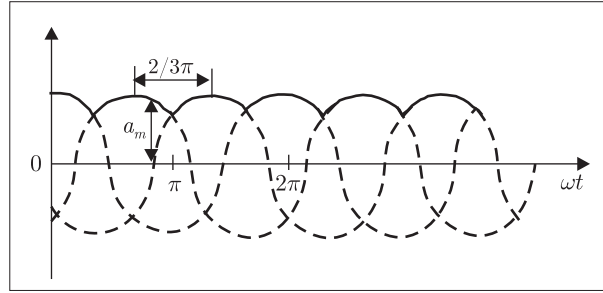


Рис. 3

В этом выражении скачкообразная составляющая

$$\frac{2a_m}{\pi}1(t) = \frac{2a_m}{\pi}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{2a_m}{\pi}e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t. \quad (8)$$

С учетом (8) выражение (7) принимает вид

$$U_2(t) = \frac{2a_m}{\pi}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{2a_m}{\pi}e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t + \frac{4a_m}{\pi} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (9)$$

Третий сигнал представлен на рис. 3. Он является суммарное выходное напряжение  $U_3(t)$  трех однофазных выпрямителей. Выражение этого  $U_3(t)$  в виде ряда Фурье следующее [2]:

$$U_3(t) = \frac{3a_m\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\omega t - \dots \right). \quad (10)$$

Как видим, в (10) имеется скачкообразная составляющая

$$\frac{3a_m\sqrt{3}}{\pi}1(t) = \frac{3a_m\sqrt{3}}{2\pi} \left( 1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right). \quad (11)$$

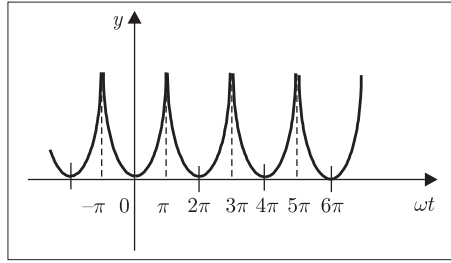


Рис. 4

С учетом (11) выражение (10) принимает вид

$$U_3(t) = \frac{3a_m\sqrt{3}}{2\pi} \left( 1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right) + \frac{3a_m\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\omega t - \dots \right). \quad (12)$$

Итак, выражения (6), (9), (12) отображают Фурье-сингулярные разложения выходных напряжений одно-, двух- и трехфазных однополупериодных выпрямителей.

Заметим, что функция  $y(t) = (\omega t)^2$  для  $-\pi \leq \omega t \leq \pi$ , изображенная на рис. 4, в своем ряде Фурье, выраженном в виде [1]

$$y(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right), \quad (13)$$

также имеет скачкообразную составляющую

$$\frac{\pi^2}{3} 1(t) = \frac{\pi^2}{3} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\pi^2}{3} e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t. \quad (14)$$

Из теории электромагнитных вибровозбудителей, контакторов, реле [6–8] известно, что тяговое усилие в этих устройствах

$$F_1(t) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}, \quad F_2(t) = \frac{\Phi^2(t)}{2\mu_0 S}, \quad (15)$$

где  $\Phi(t) = \Phi_a \sin \omega t$  — магнитный поток;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость воздуха;  $S$  — площадь поперечного сечения полюса магнитопровода у воздушного зазора;  $F_1(t)$  — тяговое усилие в электромагнитном устройстве с двумя воздушными зазорами между якорем и магнитопроводом,  $F_2(t)$  — при одном воздушном зазоре. Квадратичные зависимости (15)  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  от  $\Phi^2 = (\Phi_a \sin \omega t)^2$  с учетом тригонометрического преобразования [1]  $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$  имеют скачкообразную составляющую

$$\frac{1}{2} 1(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{1}{2} e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t.$$

А это значит, что в тяговых усилиях  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  при  $\Phi(t) = \Phi_a \sin \omega t$  всегда имеется сингулярное тяговое воздействие. С учетом (13) и (14) выражение (13) примет вид

$$y(t) = \frac{\pi^2}{3} \left[ 1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t + 4 \left( \cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right) \right]. \quad (16)$$

При малых  $\omega t$ , когда  $\sin \omega t \approx \omega t$ , тяговые усилия  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  могут принять вид (16) Фурье-сингуларисного разложения в следующей форме:

$$F_1(t) = \frac{\Phi_a^2 \pi^2}{3\mu_0 S} \left[ 1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t + 4 \left( \cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right) \right],$$

$$F_2(t) = \frac{\Phi_a^2 \pi^2}{6\mu_0 S} \left[ 1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t + 4 \left( \cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots \right) \right]. \quad (17)$$

Действуя на якорь электромагнитного устройства, тяговые усилия (17), (18) вызывают в нем полигармоническое колебательное движение. Но так как коэффициент затухания  $\alpha$  очень большой, даже может быть равен  $\infty$ , то сингуларисные колебания очень быстро затухают, а при  $\alpha = \infty$  вообще не возникают, и тогда при  $\omega t \approx \sin \omega t$  тяговые усилия  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , описываемые выражениями (17), (18), вызывают гармонические колебания якоря с частотами  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  и т. д. Этот факт, в принципе, отрицательный и его необходимо устранить (в этом прерогатива специального исследования).

Таким образом, показано доказательство встроенности в ряды Фурье с постоянными составляющими сингуларисного разложения скачкообразной функции [4, 5], что обуславливает не только развитие рядов Фурье, но и создание нового комбинационного разложения под названием Фурье-сингуларисное разложение несинусоидальных функций. Его применимость реальна в электромагнитных и других системах.

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.
2. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1985. – 528 с.
3. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
4. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
5. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электроцепях // Там само. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
6. *Вибрации в технике /* Под ред д. т. н. Э.Э. Лавендела. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
7. *Любчик М. А.* Оптимальное проектирование силовых электромагнитных механизмов. – Москва: Энергия, 1974. – 392 с.
8. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956. – 355 с.

*Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 26.02.2008*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

### **On a Fourier-singularisnal expansion of non-sine signals**

*A new Fourier-singularisnal expansion is proposed. Its use for electromagnetical mechanisms is shown.*