УДК 539.3

Т. Л. Ефимова

Численное решение задачи о неосесимметричных свободных колебаниях ортотропных неоднородных цилиндров на основе метода сплайн-коллокации

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Розглянуто задачу про вільні неосесиметричні коливання ортотропного порожнистого циліндра з різними граничними умовами на торцях на основі тривимірної теорії пружності. Основні рівняння теорії пружності за допомогою методу сплайн-апроксимації зводяться до проблеми власних значень для системи високого порядку звичайних диференціальних рівнянь. Розрахунки проводилися стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати розрахунків частот неоднорідного циліндра з різними умовами на його торцях.

Конструктивные элементы цилиндрической формы применяются в различных отраслях промышленности и современной техники. Для толстостенных элементов конструкций желательно проводить расчет динамических характеристик, используя трехмерную теорию упругости. В случае анизотропного и неоднородного цилиндра решение такой задачи сопряжено со значительными трудностями, обусловленными сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных и необходимостью удовлетворения краевым условиям на ограничивающих упругое тело поверхностях.

В научной литературе существует ряд работ, посвященных исследованию колебаний цилиндров конечной длины в рамках трехмерной теории упругости. Свободные колебания цилиндра исследовались в работах [1–11], при этом использовались методы однородных решений, конечных элементов, прямых и др. Ниже предлагается эффективная численная методика исследования собственных частот и форм неосесимметричных колебаний полых ортотропных цилиндров конечной длины при различных граничных условиях на торцах цилиндра, которая базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном из координатных направлений с последующим решением краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка в общем случае с переменными коэффициентами устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Предложенная методика позволяет проводить исследования свободных колебаний цилиндров конечной длины в случае неоднородного материала. Ранее метод сплайн-аппроксимации применялся для исследования механического поведения пластин и оболочек различной структуры [12–15].

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим полый цилиндр с внутренним радиусом $R - H$ и внешним радиусом $R + H$ длиной L, изготовленный из ортотропного материала. Исходные уравнения теории упругости для задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в цилиндрической системе координат r, θ, z имеют вид:

уравнения движения

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{z}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2};
\end{aligned}
\tag{1}
$$

соотношения Коши

$$
\begin{aligned}
&e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad e_\theta=\frac{1}{r}\left(u_r+\frac{u_\theta}{\partial\theta}\right),\qquad e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad 2e_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta},\\
&2e_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},\qquad 2e_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}u_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r};
\end{aligned}
\tag{2}
$$

закон Гука

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z=\lambda_{11}e_z+\lambda_{12}e_\theta+\lambda_{13}e_r,\\
&\sigma_\theta=\lambda_{12}e_z+\lambda_{22}e_\theta+\lambda_{23}e_r,\\
&\sigma_r=\lambda_{13}e_z+\lambda_{23}e_\theta+\lambda_{33}e_r,\\
&\sigma_{r\theta}=\lambda_{44}e_{r\theta},\qquad \sigma_{rz}=\lambda_{55}e_{rz};\qquad \sigma_{\theta z}=\lambda_{66}e_{\theta z},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где элементы матрицы жесткости $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}(r,z)$ — непрерывные и дифференцируемые функции координат r и z. Здесь t — временная координата, $u_r(r,\theta,z,t)$, $u_\theta(r,\theta,z,t)$, $u_z(r,\theta,z,t)$ — проекции полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных соответственно к координатным линиям r, θ, z; e_r, e_θ, e_z — относительные линейные деформации в направлении координатных линий; $e_{\theta z}$, e_{rz}, $e_{r\theta}$ — деформация сдвига; σ_r, σ_θ, σ_z — нормальные напряжения; $\sigma_{\theta z}$, σ_{rz}, $\sigma_{r\theta}$ — касательные напряжения; плотность материала $\rho(r,z)$ — непрерывная функция координат r и z. Элементы λ_{ij} матрицы жесткости могут быть вычислены через элементы матрицы податливости c_{ij}, которые в свою очередь могут быть определены через технические постоянные

$$
\begin{aligned}
&c_{11}=\frac{1}{E_z},\qquad c_{12}=-\frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta},\qquad c_{13}=-\frac{\nu_{rz}}{E_z};\qquad c_{22}=\frac{1}{E_\theta},\qquad c_{23}=-\frac{\nu_{\theta r}}{E_r},\\
&c_{33}=\frac{1}{E_r},\qquad c_{44}=\frac{1}{G_{r\theta}},\qquad c_{55}=\frac{1}{G_{rz}},\qquad c_{66}=\frac{1}{G_{\theta z}}.
\end{aligned}
$$

На боковых поверхностях цилиндра при $r=R\pm H$ отсутствуют напряжения, и граничные условия принимают следующий вид:

$$
\sigma_r(r,\theta,z,t)=0,\qquad \sigma_{r\theta}(r,\theta,z,t)=0,\qquad \sigma_{rz}(r,\theta,z,t)=0.
\tag{4}
$$

На торцах $z=0$ и $z=L$ рассмотрим следующие граничные условия

$$
1)\ \sigma_r=0,\qquad u_\theta=0,\qquad u_r=0\qquad \text{или}\qquad \frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\qquad u_\theta=0,\qquad u_r=0;
\tag{5}
$$

$$2)\ \sigma_{rz}=0,\qquad \sigma_{\theta z}=0,\qquad u_z=0\qquad \text{или}\qquad \frac{\partial u_r}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u_\theta}{\partial z}=0,\qquad u_z=0; \tag{6}$$

$$3)\ u_r=0,\qquad u_\theta=0,\qquad u_z=0. \tag{7}$$

Так как все точки цилиндра совершают гармонические колебания с частотой ω, а также в силу периодичности рассматриваемых функций по координате θ, перемещения можна представить в виде (далее знак $\widehat{\ }$ опускается)

$$\begin{aligned} &u_r(r,\theta,z,t)=\widehat{u}_r(r,z)\cos n\theta\exp(i\omega t),\qquad u_\theta(r,\theta,z,t)=\widehat{u}_\theta(r,z)\sin n\theta\exp(i\omega t),\\ &u_z(r,\theta,z,t)=\widehat{u}_z(r,z)\cos n\theta\exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{8}$$

С учетом этого запишем разрешающую систему уравнений относительно перемещений в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}=a_{11}u_r+a_{12}\frac{\partial u_r}{\partial z}+a_{13}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+a_{14}\frac{\partial u_r}{\partial r}+a_{15}u_\theta+a_{16}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+a_{17}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\\ &\qquad +a_{18}\frac{\partial u_z}{\partial r}+a_{19}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z},\\ &\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}=a_{21}u_r+a_{22}\frac{\partial u_r}{\partial r}+a_{23}u_\theta+a_{24}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+a_{25}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+a_{26}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+a_{27}u_z+a_{28}\frac{\partial u_z}{\partial z},\\ &\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}=a_{31}u_r+a_{32}\frac{\partial u_r}{\partial z}+a_{33}\frac{\partial u_r}{\partial r}+a_{34}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+a_{35}u_\theta+a_{36}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+a_{37}u_z+\\ &\qquad +a_{38}\frac{\partial u_z}{\partial z}+a_{39}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+a_{3,10}\frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \tag{9}$$

где коэффициенты $a_{kl}=a_{kl}(r,z)$ определяются таким образом:

$$\begin{aligned} &a_{11}=\frac{\lambda_{22}+n^2\lambda_{44}}{\lambda_{33}}\frac{1}{r^2}-\frac{1}{\lambda_{33}}\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{1}{\lambda_{33}}\rho\omega^2,\qquad a_{12}=-\frac{1}{\lambda_{33}}\frac{\partial\lambda_{55}}{\partial z},\\ &a_{13}=-\frac{\lambda_{55}}{\lambda_{33}},\qquad a_{14}=-\frac{1}{r}-\frac{1}{\lambda_{33}}\frac{\partial\lambda_{33}}{\partial r},\qquad a_{15}=\frac{\lambda_{22}+\lambda_{44}}{\lambda_{33}}\frac{n}{r^2}-\frac{1}{\lambda_{33}}\frac{\partial\lambda_{23}}{\partial r}\frac{n}{r},\\ &a_{16}=-\frac{\lambda_{23}+\lambda_{44}}{\lambda_{33}}\frac{n}{r},\qquad a_{17}=\frac{\lambda_{12}-\lambda_{13}}{\lambda_{33}}\frac{1}{r}-\frac{1}{\lambda_{33}}\frac{\partial\lambda_{13}}{\partial r},\qquad a_{18}=-\frac{1}{\lambda_{33}}\frac{\partial\lambda_{55}}{\partial z},\\ &a_{19}=-\frac{\lambda_{13}+\lambda_{55}}{\lambda_{33}},\qquad a_{21}=\frac{\lambda_{22}+\lambda_{44}}{\lambda_{44}}\frac{n}{r^2}+\frac{1}{\lambda_{44}}\frac{\partial\lambda_{44}}{\partial r}\frac{1}{r},\qquad a_{22}=\frac{\lambda_{44}+\lambda_{23}}{\lambda_{44}}\frac{n}{r},\\ &a_{23}=\frac{\lambda_{44}+\lambda_{22}n^2}{\lambda_{44}}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\lambda_{44}}\frac{\partial\lambda_{44}}{\partial r}-\frac{1}{\lambda_{44}}\rho\omega^2,\qquad a_{24}=-\frac{1}{\lambda_{44}}\frac{\partial\lambda_{66}}{\partial z},\qquad a_{25}=-\frac{\lambda_{66}}{\lambda_{44}},\\ &a_{26}=-\frac{1}{r},\qquad a_{27}=\frac{1}{\lambda_{44}}\frac{\partial\lambda_{66}}{\partial z}\frac{n}{r},\qquad a_{28}=\frac{\lambda_{12}+\lambda_{66}}{\lambda_{44}}\frac{n}{r},\qquad a_{31}=-\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial\lambda_{12}}{\partial z}\frac{1}{r},\\ &a_{32}=-\frac{\lambda_{12}+\lambda_{55}}{\lambda_{55}}\frac{1}{r}-\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial\lambda_{55}}{\partial r},\qquad a_{33}=-\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial\lambda_{13}}{\partial z},\qquad a_{34}=-\frac{\lambda_{13}+\lambda_{55}}{\lambda_{55}},\\ &a_{35}=-\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial\lambda_{12}}{\partial z}\frac{n}{r},\qquad a_{36}=-\frac{\lambda_{66}+\lambda_{12}}{\lambda_{55}}\frac{n}{r},\qquad a_{37}=\frac{\lambda_{66}}{\lambda_{55}}\frac{n^2}{r^2}-\frac{1}{\lambda_{55}}\rho\omega^2,\\ &a_{38}=-\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial z},\qquad a_{39}=-\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{55}},\qquad a_{3,10}=-\frac{1}{r}-\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial\lambda_{55}}{\partial r}. \end{aligned} \tag{10}$$

Метод решения. Задачу (9) с соответствующими граничными условиями можно решить с использованием метода сплайн-коллокации [4, 5, 12–15]. Разрешающие функции $u_r(r,z)$, $u_z(r,z)$ представим в виде

$$u_r(r,z) = \sum_{i=0}^{N} u_{ri}(r)\varphi_{1i}(z), \qquad u_\theta(r,z) = \sum_{i=0}^{N} u_{\theta i}(r)\varphi_{2i}(z),$$
$$u_z(r,z) = \sum_{i=0}^{N} u_{zi}(r)\varphi_{3i}(z), \tag{11}$$

где u_{ri}, $u_{\theta i}$, u_{zi} — искомые функции переменной r, $\varphi_{ji}(z)$ $(j = 1,2,3;\ i = 1,\ldots,N)$ — линейные комбинации кубических B-сплайнов на равномерной сетке Δ: $0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Подставляя представление (11) в уравнения (9), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0,\ldots,N$ [4]. Если ввести обозначения $\Phi_j = [\varphi_{ji}(\xi_k)]$, $k, i = 0,\ldots,N$, $j = 1,2,3$,

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_r = \{u_{r0}, u_{r1},\ldots,u_{rN}\}^T, \qquad \overline{\widetilde{u}_r} = \{\widetilde{u}_{r0}, \widetilde{u}_{r1},\ldots,\widetilde{u}_{rN}\}^T,\\
&\overline{u}_\theta = \{u_{\theta 0}, u_{\theta 1},\ldots,u_{\theta N}\}^T, \qquad \overline{\widetilde{u}_\theta} = \{\widetilde{u}_{\theta 0}, \widetilde{u}_{\theta 1},\ldots,\widetilde{u}_{\theta N}\}^T,\\
&\overline{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1},\ldots,u_{zN}\}^T; \qquad \overline{\widetilde{u}_z} = \{\widetilde{u}_{z0}, \widetilde{u}_{z1},\ldots,\widetilde{u}_{zN}\}^T,\\
&\overline{a}_{11}^T = \{a_{11}(r,\xi_0,\omega), a_{11}(r,\xi_1,\omega),\ldots,a_{11}(r,\xi_N,\omega)\},\\
&\overline{a}_{23}^T = \{a_{23}(r,\xi_0,\omega), a_{23}(r,\xi_1,\omega),\ldots,a_{23}(r,\xi_N,\omega)\},\\
&\overline{a}_{37}^T = \{a_{37}(r,\xi_0,\omega), a_{37}(r,\xi_1,\omega),\ldots,a_{37}(r,\xi_N,\omega)\},
\end{aligned} \tag{12}$$

а все остальные $\overline{a}_{kl}^T = \{a_{kl}(r,\xi_0), a_{kl}(r,\xi_1),\ldots,a_{kl}(r,\xi_N)\}$, при этом для матрицы $A = [a_{ij}]$ $\{i,j = 0,\ldots,N\}$ и вектора $\overline{c} = \{c_0, c_1,\ldots,c_N\}^T$ обозначить через $\overline{c} * A$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $6(N+1)$ относительно $\overline{u}_r$, $\overline{\overline{u}}_r$, u_θ, $\overline{\overline{u}}_\theta$, u_z, $\overline{\overline{u}}_z$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overline{u_r}}{dr} = \overline{\widetilde{u_r}}; \qquad \frac{d\overline{u_\theta}}{dr} = \overline{\widetilde{u_\theta}}; \qquad \frac{d\overline{u_z}}{dr} = \overline{\widetilde{u_z}},\\
&\frac{d\overline{\widetilde{u_r}}}{dr} = \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{11} * \Phi_1 + \overline{a}_{12} * \Phi_1' + \overline{a}_{13} * \Phi_1'')\overline{u_r} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{14} * \Phi_1)\overline{\widetilde{u_r}} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{15} * \Phi_2)\overline{u_\theta}\\
&\qquad + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{16} * \Phi_2)\overline{\widetilde{u_\theta}} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{17} * \Phi_3)\overline{u_z} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{18} * \Phi_3)\overline{\widetilde{u_z}} + \Phi_1^{-1}(\overline{a}_{19} * \Phi_3')\overline{\widetilde{u_z}},\\
&\frac{d\overline{\widetilde{u_\theta}}}{dr} = \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{21} * \Phi_1)\overline{u}_r + \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{22} * \Phi_1)\overline{\widetilde{u_r}} +\\
&\qquad + \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{23} * \Phi_2 + \overline{a}_{24} * \Phi_2' + \overline{a}_{25} * \Phi_2'')\overline{u}_\theta + \Phi_2^{-1}(\overline{a}_{26} * \Phi_3 + \overline{a}_{27} * \Phi_1')\overline{u_z},\\
&\frac{d\overline{\widetilde{u_z}}}{dr} = \Phi_3^{-1}(\overline{a}_{31} * \Phi_1 + \overline{a}_{22} * \Phi'{}_1)\overline{u_r} + \Phi_3^{-1}(\overline{a}_{33} * \Phi_1 + \overline{a}_{34} * \Phi'{}_1)\overline{\widetilde{u_r}} +\\
&\qquad + \Phi_3^{-1}(\overline{a}_{35} * \Phi_2 + \overline{a}_{36} * \Phi_2')\overline{u_\theta} + \Phi_3^{-1}(\overline{a}_{37} * \Phi_3 + \overline{a}_{38} * \Phi_3' + \overline{a}_{39} * \Phi_3'')\overline{u}_z +\\
&\qquad + \Phi_3^{-1}(\overline{a}_{3,10} * \Phi_3)\overline{\widetilde{u_z}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Граничные условия при $r = R \pm H$ для данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_{11}\Phi_1\overline{\overline{u}}_r + \overline{\lambda}_{12}\Phi_1\frac{1}{r}\overline{u}_r + \overline{\lambda}_{12}\Phi_2\frac{n}{r}\overline{u}_\theta + \overline{\lambda}_{13}\Phi_2'\overline{u}_z = \overline{0},\\
&\overline{\lambda}_{44}\Phi_1 n\overline{\overline{u}}_r + \overline{\lambda}_{44}\Phi_2\frac{1}{r}\overline{u}_\theta - \overline{\lambda}_{44}\Phi_2\overline{\overline{u}}_\theta = \overline{0},\\
&\overline{\lambda}_{55}\Phi_1'\overline{\overline{u}}_r + \overline{\lambda}_{55}\Phi_2\overline{\overline{u}}_z = \overline{0},
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\overline{\lambda}_{1i}^T = \{\lambda_{1i}(R \pm H, \xi_0), \ldots, \lambda_{1i}(R \pm H, \xi_N)\}$, $(i = 1, 2, 3)$; $\overline{\lambda}_{44}^T = \{\lambda_{44}(R \pm H, \xi_0), \ldots, \lambda_{55}(R \pm \pm H, \xi_N)\}$; $\overline{\lambda}_{55}^T = \{\lambda_{55}(R \pm H, \xi_0), \ldots, \lambda_{55}(R \pm H, \xi_N)\}$. Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13) с граничными условиями (14) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [3].

Решение задачи. Анализ результатов. Для оценки точности предложенной методики приводилось сравнение (табл. 1) первых обезразмеренных частот $\overline{\omega_1} = \omega_1(h/\pi)\sqrt{\rho/G}$, $h = 2H$, $n = 1$ колебаний полого изотропного цилиндра с шарнирно опертыми торцами (граничные условия (6)) и с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, $h/R = 1$ для различных значений h/L, полученнных с использованием метода сплайн-коллокации (МСК) при тридцати точках коллокации, частот, полученных в работе [6] аналитически, а также частот, полученных в работе [8] методом конечных элементов. Полученные по методу сплайн-коллокации результаты дают хорошее совпадение с аналогичными, приведенными в указанных работах. В табл. 1 также представлены частоты для жестко защемленного по торцам цилиндра (граничные условия (8)) с указанными параметрами.

Изучалось влияние неоднородности материала на частоты колебаний при $n = 1$ цилиндра с параметрами $\nu = 0,3$, $R = 4$, $L = 10$ и постоянной плотностью материала. Закон изменения модуля Юнга выбирался в виде

$$E(r, z) = \left(\alpha\left(\frac{6z^2}{L^2} - \frac{6z}{L} + 1\right) + 1\right)E_0. \tag{15}$$

(При этом средний модуль Юнга оставался постоянным и равным E_0 для всех возможных значений параметра α.) В табл. 2 представлены частоты $\overline{\omega} = \omega H\sqrt{\rho/G_0}$, $E_0 = 2(1 + \nu)G_0$ колебаний такого цилиндра с шарнирно опертыми (Ш-Ш-граничные условия (6)) и жестко защемленными торцами (Ж-Ж-граничные условия (8)) для различных значений параметра α. Случай $\alpha = 0$ соответствует однородному материалу.

С увеличением параметра α как для шарнирно опертого цилиндра по торцам, так и для случая жестко защемленных торцов наблюдается убывание первой и второй частоты. Тре-

Таблица 1

H/R	Шарнирное опирание торцов			Жесткое защемление МСК, $\overline{\omega}_1$
	Арменакас [6] $\overline{\omega}_1$	Лой, Лэм [8], $\overline{\omega}_1$	Использование МСК, $\overline{\omega}_1$	
0,1	0,03563	0,03563	0,03563	0,06240
0,2	0,11368	0,11368	0,11368	0,15903
0,4	0,29836	0,29836	0,29836	0,36591
1,0	0,86589	0,86618	0,86589	0,95474

Таблица 2

Тип граничных условий	$\overline{\omega}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}6$
Ш-Ш	$\overline{\omega}_1$	0,20901	0,19835	0,18632
	$\overline{\omega}_2$	0,44332	0,43955	0,42866
	$\overline{\omega}_3$	0,47255	0,48111	0,48519
Ж-Ж	$\overline{\omega}_1$	0,24927	0,25667	0,26018
	$\overline{\omega}_2$	0,49110	0,49580	0,49488
	$\overline{\omega}_3$	0,54563	0,55141	0,55064

тья частота в первом случае (Ш-Ш) растет, а во втором случае (Ж-Ж) ведет себя немонотонно.

1. *Григоренко А. Я.* Численное решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях полого ортотропного цилиндра при различном закреплении торцов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С. 49–54.
2. *Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Макар В. М.* Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Там же. – 2001. – **37**, № 5. – С. 44–51.
3. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкаръ А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л.* Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.
5. *Ефимова Т. Л.* Решение задач о свободных крутильных колебаниях толстостенных ортотропных неоднородных цилиндров // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 92–100.
6. *Armenakas A. E., Gazis D. S., Herrmann G.* Free vibrations of circular cylindrical shells. – Oxford: Pergamon Press, 1969.
7. *Grigorenko A. Ya.* Numerical solution of stationary dynamic processes in anisotropic inhomogeneous cylinders // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No 8. – P. 831–836.
8. *Loy C. T., Lam K. Y.* Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // J. Sound and Vibration. – 1999. – **226**, No 4. – P. 719–737.
9. *Heyliger P. R.* Axisymmetric free vibration of finite anisotropic cylinders // Ibid. – 1991. – **148**, No 3. – P. 507–520.
10. *Hutchinson J. R.* Axisymmetric vibration of free finite-length rod // J. of Acoust. Soc. of America. – 1972. – **51**. – P. 223–240.
11. *Wang H., Williams K.* Vibrational modes of thick cylinders of finite length // J. Sound and Vibration. – 1996. – **191**, No 5. – P. 955–971.
12. *Авраменко О. А.* О влиянии локальных нагрузок на напряженно-деформированное состояние нетонких ортотропных конических оболочек // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 103–113.
13. *Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. И.* О свободных колебаниях прямоугольных в плане ортотропных пологих оболочек переменной толщины // Там же. – 2007. – **43**, № 6. – С. 102–115.
14. *Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. И.* Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Там же. – 2007. – **43**, № 4. – С. 89–98.
15. *Григоренко А. Я., Яремченко Н. П.* О напряженном состоянии прямоугольных в плане нетонких ортотропных оболочек переменной толщины // Там же. – 2008. – **44**, № 8. – С. 91–102.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 18.05.2009

T. L. Efimova

Numerical solution of the problem on non-axisymmetric free vibrations of an orthotropic inhomogeneous cylinder by the spline-collocation method

A problem on natural vibrations of an orthotropic hollow cylinder under various boundary conditions of its end-faces on the basis of 3-D theory of elasticity is considered. The original partial equations of the theory of elasticity, using the spline-approximation, are reduced to the problem for eigenvalues for the systems of ordinary differential equations of a high order. The problem is solved by the steady-state numerical method of discrete orthogonalization. The results of calculation for the case of an inhomogeneous cylinder for different kinds of boundary conditions on the its end-faces are presented.