

В. Л. Поляков

О прогнозе динамики потерь напора в загрузке фильтра*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)*

Отримано ефективний наближений розв'язок математичної задачі фільтрування малокоцентованої суспензії крізь пористе завантаження при лінійній кінетиці масообміну. Виконано його обґрунтування шляхом порівняння з точним на багаточисленних прикладах. Виведено надійну формулу для визначення втрат напору в завантаженні.

Особенно сложным в практике и теории фильтрования суспензий вопросом, который до сих пор не имеет удовлетворительного решения, является прогноз роста потерь напора Δh в пористой (зернистой) среде загрузки. Именно указанные потери представляют собой основной показатель работоспособности фильтра, а превышение ими некоторого (предельно допустимого) значения Δh_* свидетельствует о его непроизводительном действии и необходимости проведения промывки. Предпринимались многочисленные попытки разработать обобщенные зависимости $\Delta h(t)$, которые пока не дали желаемых результатов. Так, проблематично использование в приложениях зависимостей, полученных теоретическим путем [1] ввиду их интегральной формы. Область же применения эмпирических и полуэмпирических зависимостей [2–5] оказалась слишком ограниченной. В данной работе выведена обобщенная теоретическая зависимость $\Delta h(t)$, что потребовало нового решения известной математической задачи разделения суспензии в однородной загрузке при линейной кинетике массообмена между ее твердой и жидкой фазами, а также режиме фильтрования с постоянным расходом.

Процессы массопереноса, массообмена и фильтрации описываются системой уравнений [6, 7]

$$V \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha C - \beta S, \quad (2)$$

$$V = -k(S_d) \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь V — скорость фильтрования; C , S , S_d — объемные концентрации взвеси, осажденных частиц суспензии и осадка (частицы, связанная вода); α , β — коэффициенты скоростей прилипания взвешенных частиц и отрыва прилипших; k — коэффициент фильтрации; h — напор. Наряду с (1)–(3) математическая модель фильтрования содержит эмпирические зависимости $k(S_d)$ и соотношение между концентрациями S , S_d [8, 9]

$$k = k_0 \left[1 - \left(\frac{S_d}{n_0} \right)^{m_1} \right]^{m_2}, \quad (4)$$

$$S_d = \gamma S, \quad (5)$$

где k_0, n_0 — коэффициент фильтрации и пористость чистой загрузки; m_1, m_2, γ — эмпирические коэффициенты. Наконец, граничные и начальные условия имеют следующий вид:

$$z = 0, \quad C = C_0; \quad z = L, \quad h = H_d; \quad (6)$$

$$t = 0, \quad S = 0. \quad (7)$$

Здесь C_0 — исходная концентрация примеси; L — высота загрузки; H_d — постоянный напор на выходе из загрузки. С целью обобщения результатов теоретических исследований вводятся безразмерные переменные и параметры: $\bar{C} = C/C_0$, $\bar{S} = S/(n_0C_0)$, $\bar{z} = z/L$, $\bar{t} = Vt/(n_0L)$, $\bar{\alpha} = \alpha L/V$, $\bar{\beta} = \beta n_0L/V$, $\bar{k} = k/k_0$, $\tilde{h} = (h - H_d)/(H_u - H_d)$, H_u — начальный напор во входном сечении загрузки, определяемый по формуле

$$H_u = H_d - \frac{VL}{k_0}.$$

Тогда постановка задачи трансформируется таким образом:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha} \bar{C} - \bar{\beta} \bar{S}, \quad (9)$$

$$\bar{k}(\bar{S}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{z}} = -1, \quad (10)$$

$$\bar{k} = [1 - (\gamma C_0 \bar{S})^{m_1}]^{m_2}, \quad (11)$$

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{C} = 1; \quad \bar{z} = 1, \quad \tilde{h} = 0; \quad (12)$$

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{S} = 0. \quad (13)$$

Вследствие постоянства скорости V уравнения (8), (9) могут решаться при первом условии (12) и (13) независимо от уравнений (10), (11). Для решения задачи (8)–(13) выполняется осреднение по расчетному периоду $[0, T]$ второго члена в правой части уравнения (9), характеризующего отрыв осажденных частиц под действием гидродинамической силы. Здесь T играет роль параметра задачи, который непосредственно в расчетах может принимать любые значения времени в течение фильтроцикла и после него, а в преобразованиях считается постоянной величиной. Итак,

$$\bar{S}_c(\bar{z}, T) = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{S}(\bar{z}, \bar{t}) d\bar{t}. \quad (14)$$

В результате система (8), (9) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}} + \bar{\alpha} \bar{C} = \bar{\beta} \bar{S}_c(\bar{z}, T). \quad (15)$$

Решение (15) при заданной входной концентрации взвеси (12) дает

$$\bar{C}(\bar{z}, T) = e^{-\bar{\alpha}\bar{z}} \left[1 + \bar{\beta} \int_0^{\bar{z}} e^{\bar{\alpha}\xi} \bar{S}_c(\xi, T) d\xi \right]. \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha} \bar{z}} \left[1 + \bar{\beta} \int_0^{\bar{z}} e^{\bar{\alpha} \xi} \bar{S}_c(\xi, T) d\xi \right] - \bar{\beta} \bar{S}_c(\bar{z}, T). \quad (17)$$

Интегрированием (17) при условии (13) с последующим осреднением по \bar{t} полученного для \bar{S} выражения выводится уравнение относительно \bar{S}_c

$$2e^{\bar{\alpha} \bar{z}} \bar{S}_c(\bar{z}, T) = T \left[\bar{\alpha} + \bar{\alpha} \bar{\beta} \int_0^{\bar{z}} e^{\bar{\alpha} \xi} \bar{S}_c(\xi, T) d\xi - \bar{\beta} e^{\bar{\alpha} \bar{z}} \bar{S}_c(\bar{z}, T) \right]. \quad (18)$$

Далее проводится замена переменных

$$y = \int_0^{\bar{z}} e^{\bar{\alpha} \xi} \bar{S}_c(\xi, T) d\xi, \quad (19)$$

так что

$$\frac{dy}{d\bar{z}} = e^{\bar{\alpha} \bar{z}} \bar{S}_c(\bar{z}, T). \quad (20)$$

С учетом (19), (20) уравнение (18) трансформируется таким образом:

$$(2 + \bar{\beta} T) \frac{dy}{d\bar{z}} = \bar{\alpha} \bar{\beta} T y + \bar{\alpha} T. \quad (21)$$

Функция $y(\bar{z})$ определяется путем решения (21) при однородном условии

$$\bar{z} = 0, \quad y = 0$$

и будет

$$y = \frac{1}{\bar{\beta}} (e^{\delta \bar{z}} - 1), \quad (22)$$

где $\delta(T) = \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} T}{2 + \bar{\beta} T}$. Имея в виду (19), \bar{S}_c станет

$$\bar{S}_c(\bar{z}, T) = \frac{\bar{\alpha} T}{2 + \bar{\beta} T} e^{-\frac{2\bar{\alpha} \bar{z}}{2 + \bar{\beta} T}}. \quad (23)$$

Зависимость $\bar{S}(\bar{z}, \bar{t})$ вытекает из решения (17) с учетом (23)

$$\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}; T) = [\bar{\alpha} - \delta(T)] \bar{t} e^{[\delta(T) - \bar{\alpha}] \bar{z}}. \quad (24)$$

Чтобы получить расчетную формулу для искомой \bar{S} , параметр T отождествляется с переменной \bar{t} и после несложных преобразований

$$\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}) = \frac{2\bar{\alpha} \bar{t}}{2 + \bar{\beta} \bar{t}} e^{-\frac{2\bar{\alpha} \bar{z}}{2 + \bar{\beta} \bar{t}}}. \quad (25)$$

Выражение для концентрации \bar{C} вытекает из (16) и, принимая во внимание (23), будет

$$\bar{C}(\bar{z}, \bar{t}) = 2e^{-\frac{2\alpha\bar{z}}{2+\beta\bar{t}}} - e^{-\alpha\bar{z}}. \quad (26)$$

Важным следствием из (25), (26) являются формулы для расчета концентраций \bar{C} , \bar{S} в характерных сечениях потока суспензии, а именно,

$$\bar{C}_e(\bar{t}) = \bar{C}(1, \bar{t}) = e^{-\alpha} \left(2e^{\frac{\alpha\beta\bar{t}}{2+\beta\bar{t}}} - 1 \right), \quad (27)$$

$$\bar{S}_i(\bar{t}) = \bar{S}(0, \bar{t}) = \frac{2\alpha\bar{t}}{2+\beta\bar{t}}. \quad (28)$$

Кроме того, на базе (25), (26) удастся сравнительно легко обосновывать инженерные параметры. При этом следует возвратиться к размерным величинам и, например, высоту L , исходя из требования к качеству водоочистки $\bar{C}_e \leq \bar{C}_{e*}$ (\bar{C}_{e*} — относительная предельно допустимая выходная концентрация взвеси) и заданной длительности времени защитного действия загрузки t_p рекомендуется определять из уравнения

$$2e^{-\frac{\alpha\beta t_p}{v(2+\beta t_p)}L} - \bar{C}_{e*} e^{\frac{\alpha}{v}L} = 1.$$

Благодаря простоте выражения (25) появляется возможность вывести удобную с практической точки зрения формулу для определения относительных потерь напора $\Delta\bar{h}$. Предварительно для $\Delta\bar{h}$ находится интегральное представление путем интегрирования (10) с учетом второго условия (12)

$$\Delta\bar{h} = \tilde{h}(0, \bar{t}) = \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}))}. \quad (29)$$

Интеграл в (29) удастся выразить через элементарные функции при некоторых целых значениях m_2 . В теоретических разработках предпочтение отдается значению $m_2 = 3$, которое обосновано экспериментально в работах [10, 11]. Тогда искомая формула принимает окончательный вид

$$\Delta\bar{h} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{e^{\lambda_2} - \lambda_1}{1 - \lambda_1} - \frac{2\lambda_1(1 - e^{\lambda_2})}{\lambda_2(1 - \lambda_1)(e^{\lambda_2} - \lambda_1)} - \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_2} \left[\frac{1}{(e^{\lambda_2} - \lambda_1)^2} - \frac{1}{(1 - \lambda_1)^2} \right], \quad (30)$$

где

$$\lambda_1(\bar{t}) = \left(\frac{2\alpha\gamma C_0 \bar{t}}{2 + \beta\bar{t}} \right)^{m_1}, \quad \lambda_2(\bar{t}) = 2 \frac{\alpha m_1}{2 + \beta\bar{t}}.$$

Аналогичные строгие формулы для относительных концентраций $\bar{t} \gg 1$ имеют следующую форму [1]:

$$\bar{C}(\bar{z}, \bar{t}) = e^{-\alpha\bar{z}} \left[e^{-\beta\bar{t}} I_0 \left(2\sqrt{\alpha\beta\bar{z}\bar{t}} \right) + \beta \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta\xi} I_0 \left(2\sqrt{\alpha\beta\bar{z}\xi} \right) d\xi \right], \quad (31)$$

$$\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}) = \alpha e^{-\alpha\bar{z}} \int_0^{\bar{t}} e^{-\beta\xi} I_0 \left(2\sqrt{\alpha\beta\bar{z}\xi} \right) d\xi, \quad (32)$$

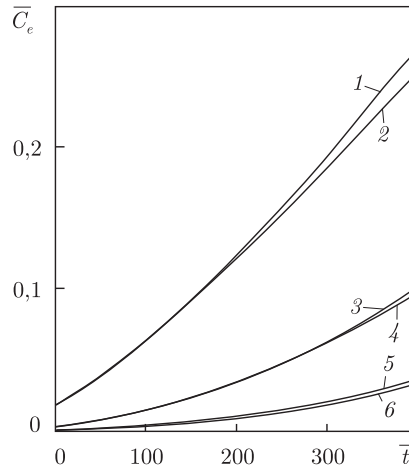


Рис. 1. Изменение выходной концентрации взвеси: 1, 3, 6 — по точной формуле; 2, 4, 5 — по приближенной формуле; 1, 2 — $\bar{\alpha} = 4$; 3, 4 — $\bar{\alpha} = 6$; 5, 6 — $\bar{\alpha} = 8$

где I_0 означает функцию Бесселя мнимого аргумента первого рода нулевого порядка. Точные значения потерь напора вычисляются по (29), поскольку упрощенные представления для $\Delta \bar{h}$ ввиду сложности выражения (32) оказываются невозможными.

Построенное выше аналитическое решение и вытекающие из него формулы обеспечивают высокую точность расчетов характеристик фильтрования. Справедливость этого утверждения следует из сопоставления основных характеристик, определявшихся параллельно по приближенным и строгим зависимостям. Длительность расчетных периодов заметно превосходила продолжительность фильтроциклов, что позволило полнее оценить возможности нового решения. Исходная информация включала, прежде всего, фиксированные типичные значения коэффициентов $\bar{\beta}$ (0,005), γ (20). Другие параметры задачи варьировались в характерных пределах, в частности, полагалось $\bar{\alpha} = 4, 6, 8$; $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}, 7,5 \cdot 10^{-5}$. Предметом множества вычислений стали относительные характеристики-концентрации \bar{C}_e, \bar{S}_i и потери $\Delta \bar{h}$.

В первую очередь устанавливалась зависимость $\bar{C}_e(\bar{t})$ по точной (31) и приближенной (27) формулам для разных $\bar{\alpha}$ и $C_0 = 5 \cdot 10^{-5}$. Соответствующие кривые приведены на рис. 1. Заметное расхождение между приближенными и контрольными кривыми начинается примерно при $\bar{t} > 300$, что выходит за пределы фильтроцикла. Таким образом, судя уже по результатам расчетов первой ключевой технологической характеристики, погрешность при количественном анализе качества осветления суспензии по формуле (27) в практическом отношении является ничтожно малой, причем вне зависимости от сорбционной способности фильтрующего материала. Несколько большее отклонение приближенных кривых от точных наблюдается при определении динамики накопления иммобилизованных частиц. Как видно из рис. 2, явные отличия в значениях \bar{S}_i , найденные по формулам (28), (32), отмечаются уже при $\bar{t} > 200$. Следует подчеркнуть, что важное значение для прикладных целей здесь имеют не сами такие отличия, а их влияние на достоверность нахождения второй ключевой характеристики — потерь напора. Рис. 3 свидетельствует о возможном ощутимом опережении потерями напора согласно (30) действительных потерь в соответствии с (29), (32), но только при значениях времени, существенно больших длительности фильтроцикла.

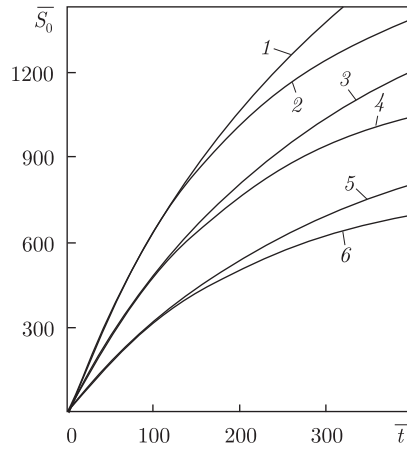


Рис. 2. Изменение относительной объемной концентрации осажденных частиц суспензии во входном сечении загрузки: 1, 3, 5 — по приближенной формуле; 2, 4, 6 — по точной формуле; 1, 2 — $\bar{\alpha} = 8$; 3, 4 — $\bar{\alpha} = 6$; 5, 6 — $\bar{\alpha} = 4$

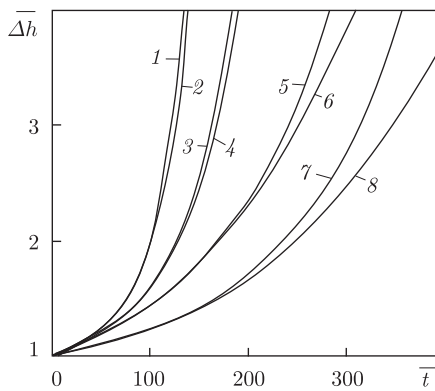


Рис. 3. Рост относительных потерь напора в загрузке со временем: 1, 3, 5, 7 — по приближенной формуле; 2, 4, 6, 8 — по точной формуле; 1, 2, 7, 8 — $\bar{\alpha} = 8$; 3, 4 — $\bar{\alpha} = 6$; 5, 6 — $\bar{\alpha} = 4$; 1-4 — $C_0 = 5 \cdot 10^{-5}$; 5 — $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$

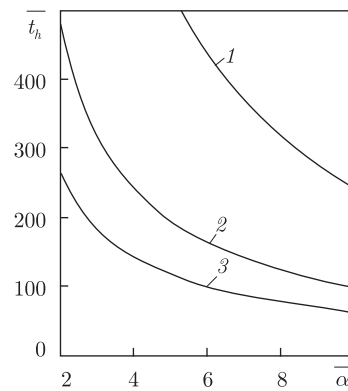


Рис. 4. График зависимости $\bar{t}_h(\bar{\alpha})$: 1 — $C_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$; 2 — $C_0 = 5 \cdot 10^{-5}$; 3 — $C_0 = 7,5 \cdot 10^{-5}$

Наконец, для иллюстрации применения формулы (30) в инженерных целях многократно вычислялось относительное время \bar{t}_h достижения также относительных потерь напора $\Delta \bar{h}_*$. В соответствующих примерах принималось $\Delta \bar{h}_* = 3$, коэффициент $\bar{\alpha}$ менялся непрерывно в пределах от 2 до 10 и дискретно C_0 . Кривые зависимости $\bar{t}_p(\bar{\alpha})$ изображены на рис. 4 и указывают на существенное влияние сорбционных свойств фильтрующего материала, исходного содержания взвеси на динамику потерь напора. Быстрый рост времени \bar{t}_h с уменьшением $\bar{\alpha}$ объясняется, с одной стороны, более равномерным распределением осадка в загрузке, с другой стороны, усиливающимся проскоком через нее частиц суспензии.

В заключение можно сделать вывод о безусловной пригодности предложенного приближенного решения для теоретических исследований разделения суспензии на фильтровальных сооружениях, высокой эффективности расчетных формул на его базе для прогноза изменения важнейших характеристик фильтрования, обоснования конструктивных и технологических параметров фильтров.

1. Поляков В. Л. Расчет фильтрования суспензий через многослойную загрузку при линейной кинетике массообмена // Химия и технология воды. – 2008. – **30**, № 1. – С. 3–31.
2. Зосин А. П., Приймак Т. И., Шалль Э. Э. и др. Фильтрующие системы на основе комплексных минеральных загрузок для очистки рудничных вод // Вода и экология. – 2003. – **3(16)**. – С. 58–65.
3. Boller M. A., Kavanaugh M. C. Particle characteristics and headloss increase in granular media filtration // Water Res. – 1995. – **29**, No 4. – P. 1139–1149.
4. O'Melia C. R., Ali W. The role of retained particles in deep bed filtration // Prog. Wat. Tech. – 1978. – **10**. – P. 167–182.
5. Stevenson D. G. Process conditions for the backwashing of filters with simultaneous air and water // Water Res. – 1995. – **29**, No 11. – P. 2594–2597.
6. Веницианов Е. В., Рубинштейн Р. Н. Динамика сорбции из жидких сред. – Москва: Наука, 1983. – 237 с.
7. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды. – Москва: Стройиздат, 1964. – 155 с.
8. Аюкаев Р. И., Мельцер В. З. Производство и применение фильтрующих материалов для очистки воды: Справ. пос. – Ленинград: Стройиздат, 1985. – 118 с.
9. Ojha C. S. P., Graham N. J. D. Theoretical estimates of bulk specific deposit in deep bed filters // Water Res. – 1993. – **27**, No 3. – P. 377–387.
10. Минц Д. М., Мельцер В. З. Гидравлическое сопротивление зернистой пористой среды в процессе коагуляции // Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 2. – С. 304–306.
11. Шехтман Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. – Москва: Изд-во АН СССР, 1961. – 212 с.

Институт гидродинамики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 05.06.2009

V. L. Polyakov

On the prediction of the head loss dynamics within a filter medium

An effective approximate solution to the mathematical task of low-content suspension filtration through porous filter media has been obtained at the linear mass-exchange kinetics and a constant filtration rate. The solution has been substantiated by its comparison with the exact solution to the same task for numerous examples. A reliable generalized theoretical formula has been deduced for determining the head losses within filter medium.