УДК 519.9

О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер

Про одну кубатурну формулу для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

На класі функцій $f(x,y)$ з неперервними в $G=[0,1]^2$ похідними $f^{(p,0)}$, $f^{(0,p)}$, $f^{(p,p)}$, для яких $\|f^{(p,0)}\|_{C(G)}$, $\|f^{(0,p)}\|_{C(G)}$, $\|f^{(p,p)}\|_{C(G)}=1$, $p=1,2$, будується кубатурна формула для обчислення коефіцієнтів Фур'є $c_{m,n}(f)$, $|m|$, $|n|\leqslant N$ на основі сплайн-інтерполяції, побудованої з використанням операторів сплайн-інтерлінації. Знайдено оцінку похибки.

У цифровій обробці двовимірних сигналів високу точність можна отримати при використанні нового сіткового інформаційного оператора-інтерполянта, побудованого на основі операторів інтерлінації [1]. На його основі будуються нові оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації на різних класах функцій.

Побудова кубатурних формул наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням нового сіткового інформаційного оператора-інтерполянта, побудованого на основі операторів інтерлінації на різних класах функцій, досліджувалась у [2–5]. Основною перевагою цих кубатурних формул є на порядок зменшене використання значень підінтегральної функції порівняно з класичними формулами для досягнення заданої точності.

У даній роботі наведено новий підхід до знаходження оцінки похибки кубатурної формули, яка отримується через оцінку похибки наближення функції оператором-інтерлінантом та оцінку похибки наближення оператора-інтерлінанта оператором-інтерполянтом, побудованим на основі оператора-інтерлінанта.

Досліджується така задача. На класі дійсних функцій двох змінних $f(x,y)$, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що частинні похідні p-го порядку за змінними x та y, а також мішані похідні p-го порядку дорівнюють одиниці на заданих лініях, тобто $f^{(p,0)}(x_k,y)=1$, $f^{(0,p)}(x,y_j)=1$, $f^{(p,p)}(x,y)=1$, $p=1,2$, $x_k=k\Delta$, $y_j=j\Delta$, $\Delta=1/\ell$, будуємо кубатурну формулу наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій.

Розглянемо допоміжні функції, які використовуються для побудови кубатурної формули наближення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних:

$$h_{10}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_0,\\ \dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\leqslant x<x_1,\\ 0, & x\geqslant x_1,\end{cases}\qquad H_{10}(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant y_0,\\ \dfrac{y-y_1}{-\Delta}, & y_0\leqslant y<y_1,\\ 0, & y\geqslant y_1,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{k-1}, \\ \dfrac{x - x_k}{\Delta}, & x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ \dfrac{x - x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geqslant x_{k+1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell - 1},$$

$$H_{1j}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant y_{j-1}, \\ \dfrac{y - y_j}{\Delta}, & y_{j-1} \leqslant y < y_j, \\ \dfrac{y - y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j \leqslant y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geqslant y_{j+1}, \end{cases} \qquad j = \overline{1, \ell - 1,}$$

$$h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{\ell-1}, \\ \dfrac{x - x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1} \leqslant x < x_\ell, \\ 0, & x \geqslant x_\ell, \end{cases} \qquad H_{1\ell}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant y_{\ell-1}, \\ \dfrac{y - y_\ell}{\Delta}, & y_{\ell-1} \leqslant y < y_\ell, \\ 0, & y \geqslant y_\ell, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta, \qquad y_r = r\Delta, \qquad \Delta = \frac{1}{\ell},$$

$$\widetilde{h}_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \widetilde{x}_0, \\ \dfrac{x - \widetilde{x}_1}{-\Delta_1}, & \widetilde{x}_0 \leqslant x < \widetilde{x}_1, \\ 0, & x \geqslant \widetilde{x}_1, \end{cases} \qquad \widetilde{H}_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant \widetilde{y}_0, \\ \dfrac{y - \widetilde{y}_1}{-\Delta_1}, & \widetilde{y}_0 \leqslant y < \widetilde{y}_1, \\ 0, & \widetilde{y} \geqslant y_1, \end{cases}$$

$$\widetilde{h}_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \widetilde{x}_{\widetilde{k}-1}, \\ \dfrac{x - \widetilde{x}_{\widetilde{k}}}{\Delta_1}, & \widetilde{x}_{\widetilde{k}-1} \leqslant x < \widetilde{x}_{\widetilde{k}}, \\ \dfrac{x - \widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}}{-\Delta_1}, & \widetilde{x}_{\widetilde{k}} \leqslant x < \widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}, \\ 0, & x \geqslant \widetilde{x}_{\widetilde{k}+1}, \end{cases} \qquad \widetilde{k} = \overline{1, \ell^2 - 1},$$

$$\widetilde{H}_{1\widetilde{j}}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant \widetilde{y}_{\widetilde{j}-1}, \\ \dfrac{y - \widetilde{y}_{\widetilde{j}}}{\Delta_1}, & \widetilde{y}_{\widetilde{j}-1} \leqslant y < \widetilde{y}_{\widetilde{j}}, \\ \dfrac{y - y_{\widetilde{j}+1}}{-\Delta_1}, & \widetilde{y}_{\widetilde{j}} \leqslant y < \widetilde{y}_{\widetilde{j}+1}, \\ 0, & y \geqslant \widetilde{y}_{\widetilde{j}+1}, \end{cases} \quad \widetilde{j} = \overline{1, \ell^2 - 1},$$

$$\widetilde{h}_{1\ell^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \widetilde{x}_{\ell^2-1}, \\ \dfrac{x - x_\ell}{\Delta_1}, & \widetilde{x}_{\ell^2-1} \leqslant x < \widetilde{x}_{\ell^2}, \\ 0, & x \geqslant \widetilde{x}_{\ell^2}, \end{cases} \qquad \widetilde{H}_{1\ell^2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant \widetilde{y}_{\ell^2-1}, \\ \dfrac{y - \widetilde{y}_{\ell^2}}{\Delta_1}, & \widetilde{y}_{\ell^2-1} \leqslant y < \widetilde{y}_{\ell^2}, \\ 0, & y \geqslant \widetilde{y}_{\ell^2}, \end{cases}$$

$$\widetilde{x}_{\widetilde{k}} = \widetilde{k}\Delta_1, \qquad \widetilde{y}_{\widetilde{j}} = \widetilde{j}\Delta_1, \qquad \widetilde{k}, \widetilde{j} = \overline{0, \ell^2}, \qquad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Тоді оператор-інтерлінант

$$Of(x,y) = \sum_{k=0}^{\ell} h_{1k}(x) f(x_k, y) + \sum_{j=0}^{\ell} H_{1j}(y) f(x, y_j) - \sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{1j}(x) H_{1j}(y)$$

має такі властивості:

$$Of(x_k, y) = f(x_k, y), \qquad k = \overline{0, \ell}, \qquad Of(x, y_j) = f(x, y_j), \qquad j = \overline{0, \ell}.$$

Для обчислення інтеграла $I_1^2(m,n) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy$ пропонується формула, побудована заміною функції $f(x,y)$ оператором-інтерлінантом $Of(x,y)$:

$$\Phi_1^2(m,n) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy.$$

Підставивши вираз для оператора-інтерлінанта, матимемо:

$$\Phi_1^2(m,n) = \sum_{k=0}^{\ell}\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin(2\pi mx)\,dx \int\limits_0^1 f(x_k, y)\sin(2\pi ny)\,dy +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\ell}\int\limits_0^1 H_{1j}(y)\sin(2\pi ny)\,dy \int\limits_0^1 f(x, y_j)\sin(2\pi mx)\,dx -$$

$$- \sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin(2\pi mx)\,dx \int\limits_0^1 H_{1j}(y)\sin(2\pi ny)\,dy.$$

Для обчислення інтегралів

$$\int\limits_0^1 f(x_k, y)\sin(2\pi ny)\,dy, \qquad \int\limits_0^1 f(x, y_j)\sin(2\pi mx)\,dx$$

використаємо квадратурні формули з похибкою наближення $O(\Delta^2) = O(\Delta_1)$:

$$\widetilde{\Phi}_1^2(m,n) = \sum_{k=0}^{\ell}\sum_{\widetilde{j}=0}^{\ell^2} f(x_k, \widetilde{y}_{\widetilde{j}})\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx \int\limits_0^1 \widetilde{H}_{1\widetilde{j}}(y)\sin 2\pi ny dy +$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{\widetilde{k}=0}^{\ell^2} f(\widetilde{x}_{\widetilde{k}}, y_j)\int\limits_0^1 H_{1j}(y)\sin 2\pi ny dy\int\limits_0^1 \widetilde{h}_{1\widetilde{k}}(x)\sin 2\pi mx dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx\int\limits_0^1 H_{1j}(y)\sin 2\pi ny dy,$$

$$\widetilde{x}_{\widetilde{k}} = \widetilde{k}\Delta_1, \qquad \widetilde{y}_{\widetilde{j}} = \widetilde{j}\Delta_1, \qquad \widetilde{k}, \widetilde{j} = \overline{0, \ell^2}, \qquad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Інтеграли

$$\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx, \qquad \int\limits_0^1 \widetilde{H}_{1\widetilde{j}}(y)\sin 2\pi ny dy,$$

$$\int\limits_0^1 H_{1j}(y)\sin 2\pi ny dy, \qquad \int\limits_0^1 \widetilde{h}_{1\widetilde{k}}(x)\sin 2\pi mx dx$$

обчислюються точно. Отже, для обчислення інтеграла

$$I_1^2(m,n) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy$$

пропонується формула

$$\widetilde{\Phi}_1^2(m,n) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \widetilde{O}f(x,y)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy,$$

побудована заміною функції $f(x,y)$ оператором-інтерполянтом на основі оператора-інтерлінанта

$$\widetilde{O}f(x,y) = \sum_{k=0}^{\ell}\sum_{\widetilde{j}=0}^{\ell^2} h_{1k}(x)\widetilde{H}_{1\widetilde{j}}(y)f(x_k, \widetilde{y}_{\widetilde{j}}) + \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{\widetilde{k}=0}^{\ell^2} H_{1j}(y)\widetilde{h}_{1\widetilde{k}}(x)f(\widetilde{x}_{\widetilde{k}}, y_j) -$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} h_{1k}(x)H_{1j}(y)f(x_k, y_j).$$

Теорема. *Справедливою є така оцінка похибки наближення $I_1^2(m,n)$ кубатурною формулою $\widetilde{\Phi}_1^2(m,n)$:*

$$\rho(I_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)) = \frac{p}{(p+2)!}\left(\frac{p}{(p+2)!} + 2\right)\Delta^{2p},$$

де

$$\rho(I_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)) = \left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (f(x,y) - \widetilde{O}f(x,y))\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)\,dxdy\right|.$$

Доведення базується на отриманні оцінки похибки кубатурної формули через оцінку похибки наближення функції оператором-інтерлінантом та оцінку похибки наближення оператора-інтерлінанта оператором-інтерполянтом, побудованим на основі оператора-інтерлінанта. Тобто

$$\rho(I_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)) \leqslant \rho(I_1^2(m,n), \Phi_1^2(m,n)) + \rho(\Phi_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)),$$

$$\rho(I_1^2(m,n), \Phi_1^2(m,n)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y) - Of(x,y)) \sin(2\pi m x) \sin(2\pi n y)\, dxdy \right|,$$

$$\rho(\Phi_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 (Of(x,y) - \widetilde{O}f(x,y)) \sin(2\pi m x) \sin(2\pi n y)\, dxdy \right|.$$

При $p = 1$ маємо

$$\rho(I_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)) = \frac{13}{36}\Delta^2,$$

а при $p = 2$

$$\rho(I_1^2(m,n), \widetilde{\Phi}_1^2(m,n)) = \frac{25}{144}\Delta^4.$$

Зауваження. Якщо для наближення $I_1^2(m,n)$ використовувати такий самий метод, але замість $f(x,y)$ підставляти під знак інтеграла класичний сплайн-інтерполянт $S(x,y) = \sum_{\widetilde{k}=0}^{\ell^2} \sum_{\widetilde{j}=0}^{\ell^2} \widetilde{h}_{1\widetilde{k}}(x) \widetilde{H}_{1\widetilde{j}}(y) f(\widetilde{x}_{\widetilde{k}}, \widetilde{y}_{\widetilde{j}})$, матимемо наближення з тим самим порядком, але при цьому буде використано $Q_{\text{classic}} = O(\ell^4)$ значень $f(\widetilde{x}_{\widetilde{k}}, \widetilde{y}_{\widetilde{j}})$. При застосуванні ж запропонованого у роботі методу $Q = O(\ell^3)$.

Таким чином, на основі нового сіткового інформаційного оператора-інтерполянта, побудованого на основі операторів інтерлінації, одержана кубатурна формула наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є на класі функцій, частинні похідні яких p-го порядку за змінними x та y ($p = 1, 2$), а також мішані похідні p-го порядку дорівнюють одиниці на заданих лініях. Дана кубатурна формула використовує на порядок менше значень підінтегральної функції порівняно з класичними формулами для досягнення заданої точності. Знайдено оцінку похибки.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. – 1998. – № 1. – С. 23–28.
3. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою квадратичної сплайн-інтерполяції, побудованої на основі сплайн-інтерлінації // Праці VII Всеукр. міжнар. конф. "Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів". – 2004. – С. 289–292.
4. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 9–13.

5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Загальний метод побудови оптимальних за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінація функції // Праці VIII Всеукр. міжнар. конф. "Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів". – 2006. – С. 207–210.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 06.05.2009

O. M. Lytvyn, O. P. Nechuyviter

About one cubature formula for the calculation of two-dimensional Fourier coefficients with the use of the interlineation of functions

A cubature formula for the calculation of two-dimensional Fourier coefficients $c_{m,n}(f)$, $|m|$, $|n| \leqslant$ $\leqslant N$ *is given, where* $f(x,y)$: $f^{(p,0)}$, $f^{(0,p)}$, $f^{(p,p)} \in C(G)$, $G = [0,1]^2$, $\|f^{(p,0)}\|_{C(G)}$, $\|f^{(0,p)}\|_{C(G)}$, $\|f^{(p,p)}\|_{C(G)} = 1$, $p = 1, 2$. *This formula is constructed on the spline-interpolation by using the operators of spline-interlineation of functions. The error estimation is found.*