УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

О прямом методе Ляпунова для уравнений с дробными производными

В роботі встановлено умови еквістійкості, рівномірної стійкості та асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи рівнянь з дробовими похідними. Результати отримано на основі прямого методу Ляпунова з використанням матричнозначної функції.

Концепция дробной производной в математическом анализе восходит к 17 веку. Основы анализа для функций с дробными производными были созданы к концу 19 века. Монография [1] сыграла важную роль в систематизации результатов в этом направлении и открыла пути их применения в задачах физики, химии и инженерии. В ряде других монографий (см. [2–4] и библиографию там) теория уравнений с дробными производными получила дальнейшее развитие.

Представляет интерес распространение прямого метода Ляпунова, основанного на многокомпонентных функциях Ляпунова (см. [3]), для уравнений и систем уравнений с дробными производными.

Предварительные сведения. Как известно, дробная производная функции может быть определена различными способами (см. [1, 2]). Рассмотрим гамма-функцию

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^t e^{-t} t^{z-1} dt$$

в правой полуплоскости комплексной плоскости $\mathrm{Re}(z) > 0$. Пусть задана функция $x(t)$, которая является $(n+1)$ раз дифференцируемой в обычном смысле. Для этой функции дробная производная вводится формулой (см. [5])

$$^cD^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int\limits_{t_0}^t (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s)\, ds, \tag{1}$$

где $n-1 < q < n$. При некоторых естественных предположениях о функции $x(t)$ при $q \to \to n$ производная (1) превращается в обычную производную функции $x(t)$. Производная (1) называется в современной литературе дробной производной Капуто.

Основным достоинством определения дробной производной посредством формулы (1) является то, что начальные условия для дифференциального уравнения с дробными производными остаются такими же, как и для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения с целыми производными. Как известно [2], это не так для определений дробной производной в смысле Римана–Лиувилля либо Грюнвальда–Летникова.

Кроме того, дробная производная (1) для постоянной c равна нулю, в то время как дробная производная Римана–Лиувилля постоянной c не равна нулю и вычисляется по формуле

$$D^q c = \frac{c(t-t_0)^q}{\Gamma(1-q)}, \qquad 0 < q < 1.$$

Если $0 < q < 1$, тогда из формулы (1) следует

$$ {}^{c}D^{q}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{-q} x'(s)\, ds, \tag{2} $$

где $x'(\cdot)$ — обычная производная функции $x(t)$.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения возмущенного движения с дробными производными

$$ {}^{c}D^{q}x = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \geqslant 0, \tag{3} $$

где ${}^{c}D^{q}x$ определяется формулой (2) покомпонентно, $0 < q < 1$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times S(\rho), \mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $f(t,0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$ и $S(\rho) \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытая связная окрестность состояния $x = 0$.

Предположим, что для системы (3) каким-либо способом построена матричнозначная функция

$$ U(t,x) = [u_{ij}(t,x)], \qquad i,j = 1,2,\ldots,m, \tag{4} $$

где $u_{ii}(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ и $u_{ij}(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ при любых $i \neq j$.

Заметим, что если $u_{ij}(t,x) \equiv 0$ при всех $i \neq j$, то матричнозначная функция (3) обращается в векторную функцию $V(t,x) = \mathrm{diag}[u_{11}(t,x),\ldots,u_{mm}(t,x)]$.

С помощью матрицы (4) и вектора $\psi \in \mathbb{R}^m_+$, $\psi_i > 0$, построим скалярную функцию (см. [6] и библиографию там)

$$ v(t,x,\psi) = \psi^T U(t,x)\psi \tag{5} $$

и предположим, что $v(t,x,\psi) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}_+)$ и $v(t,0,\psi) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Матричная функция (4) является функцией Ляпунова, если с ее помощью может быть разрешена задача об устойчивости состояния $x = 0$ системы уравнений с дробными производными (3). Напомним некоторые определения.

Определение 1. Состояние $x = 0$ системы (3) называется эквиустойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует функция $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ такая, что при условии $\|x_0\| < \delta$ выполняется оценка $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определения других типов устойчивости состояния $x = 0$ системы (3) формулируются аналогично имеющимся для уравнений возмущенного движения с целыми производными (см., например, [6] и др.).

Определение 2. Функция $a(r)$ принадлежит классу K, если $a \in C([0,r], \mathbb{R}_+)$, $a(0) = 0$ и $a(r)$ строго монотонно возрастает по u. Функция $b(t,r)$ принадлежит классу CK, если для каждого t функция $b(t,r) \in K$ и $b \in C(\mathbb{R}_+ \times [0,\rho], \mathbb{R}_+)$, $b(t,0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Условия устойчивости состояния $x = 0$ **системы (3).** Получим условия некоторых типов устойчивости состояния $x = 0$ системы (3) на основе матричнозначной функции Ляпунова.

Теорема 1. *Предположим, что для системы уравнений* (3) *построена матричнозначная функция* (4) *и для функции* (5) *существуют симметричные постоянные* $(m \times m)$*-матрицы* A, B *и функции сравнения* $a_{1i} \in K$*-классу и* $b_{1i} \in CK$*-классу,* $i = 1,2,\ldots,m$, *такие, что:*

1) $a_1^T(\|x\|)Aa_1(\|x\|) \leqslant v(t,x,\psi) \leqslant b_1^T(t,\|x\|)Bb_1(t,\|x\|)$ *при всех* $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times S(\rho)$;

2) функция $v(t,x,\psi)$ определена на любом решении $x(t)$ системы (3), которое остается в области $S(\rho)$ и является невозрастающей функцией при всех $t \geqslant t_0$ в области $S(\rho)$. Тогда если матрицы A и B в условии 1 положительно определенные, то состояние $x = 0$ системы (3) эквиустойчиво. Если при этом вектор-функция $b(t,\|x\|) \equiv b(\|x\|) \in K$-классу покомпонентно, то состояние $x = 0$ системы (3) равномерно устойчиво.

Доказательство. Преобразуем оценку снизу в условии *1* теоремы 1 к виду

$$v(t,x,\psi) \geqslant \lambda_m(A)a(\|x\|), \tag{6}$$

где λ_m — минимальное собственное значение матрицы A и функция сравнения $a \in K$-классу такая, что

$$a_1^T(\|x\|)a_1(\|x\|) \geqslant a(\|x\|)$$

при $x \in S(\rho)$.

Аналогично, оценка сверху в условии *1* теоремы 1 преобразуется к виду

$$v(t,x,\psi) \leqslant \lambda_M(B)b(t,\|x\|), \tag{7}$$

где $\lambda_M(B)$ — максимальное собственное значение матрицы B и функция сравнения $b \in CK$-классу такая, что

$$b_1^T(t,\|x\|)b_1(t,\|x\|) \leqslant b(t,\|x\|)$$

при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times S(\rho)$.

Рассмотрим изменение функции $v(t) = v(t,x(t),\psi)$ вдоль решения $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ системы уравнений (3). Пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon \in (0,\rho)$ заданы. Выберем $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ так, что выполняется неравенство

$$\lambda_M(B)b(t,t_0,\delta) < \lambda_m(A)a(\varepsilon). \tag{8}$$

Далее будем рассматривать решение $x(t,t_0,x_0)$ с начальными условиями x_0: $\|x_0\| < \delta$ и покажем, что при выполнении условий теоремы 1 при всех $t \geqslant t_0$ имеет место оценка $\|x(t)\| < \varepsilon$. Если это не так, то должно существовать значение $t_1 \in (t_0,\infty)$ такое, что

$$\|x(t_1)\| = \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \|x(t)\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при} \qquad t \in [t_0,t_1]. \tag{9}$$

Согласно оценке (6) имеем

$$v(t_1,x(t_1),\psi) \geqslant \lambda_m(A)a(\|x(t_1)\|) = \lambda_m(A)a(\varepsilon).$$

Из условия (9) следует, что $\|x(t)\| < \rho$ при всех $t \in [t_0,t_1]$. По условию *2* теоремы 1 функция $v(t,x(t),\psi)$ является невозрастающей при $t \geqslant t_0$. Поэтому

$$v(t_1,x(t_1),\psi) \leqslant v(t_0,x_0,\psi) \tag{10}$$

при $t = t_1$.

Учитывая оценки (6)–(8), из неравенства (10) имеем

$$\lambda_m(A)a(\varepsilon) \leqslant v(t_1,x(t_1),\psi) \leqslant v(t_0,x_0,\psi) \leqslant \lambda_M(B)b(t_0,\|x_0\|) \leqslant \lambda_M(B)b(t_0,\delta) < \\ < \lambda_m(A)a(\varepsilon). \tag{11}$$

Полученное противоречие доказывает, что предположение о существовании $t_1 \in (t_0, \infty)$, при котором имеют место соотношения (9), не верно. Этим первое утверждение теоремы 1 доказано.

Если функция $v(t,x,\psi)$ убывающая и оценка сверху в условии *2* теоремы 1 выполняется с вектор-функцией $b(t,\|x\|) = b_1(\|x\|)$, то неравенство (8) принимает вид

$$\lambda_M(B)b_1(\delta) < \lambda_m(A)a(\varepsilon),$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$, и в этом случае состояние $x = 0$ системы (3) равномерно устойчиво. Этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что для функции $v(t,x,\psi)$ выполняются все условия, указанные в теореме 1, и, кроме того, вдоль любого решения $x(t)$ системы* (3) *функция $v(t,x(t),\psi)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, т. е.*

$$v(t,x(t),\psi) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty$$

и $x(t_0) \in S(p)$. Тогда если матрицы A и B в условии 1 теоремы 1 положительно определенные, то состояние $x = 0$ системы (3) *асимптотически устойчиво. Если при этом вектор-функция $b(t,\|x\|) = b_1(\|x\|) \in K$-классу покомпонентно, то состояние $x = 0$ системы* (3) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть для системы (3) существует матричнозначная функция (4) и функция (5) удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1. Так как выполнены все условия теоремы 1, то состояние $x = 0$ системы (3) равномерно устойчиво.

Пусть для $0 < \varepsilon < \rho$ выбрано $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ соответственно свойству равномерной устойчивости состояния $x = 0$ системы (3). При заданном $\rho \in (0, \infty)$ выберем $\varepsilon_0 \leqslant \rho$ и для этого значения ε_0 вычислим $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0)$. Рассмотрим решение $x(t; t_0, x_0)$ системы (3) с начальными условиями x_0: $\|x_0\| < \delta_0$ и вычислим величину

$$T(\varepsilon) = \left[\frac{\lambda(B)b_1(\delta_0)}{cd(\delta(\varepsilon))}\Gamma(1+q)\right]^{1/q},$$

где величина $\delta(\varepsilon)$ соответствует равномерной устойчивости состояния $x = 0$ системы (3), $c = \text{const} > 0$.

Далее пусть $\|x_0\| < \delta_0$ и $\|x(t)\| \geqslant \delta(\varepsilon)$ при некотором значении $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$. Из того, что функция $v(t,x,\psi)$ убывает до нуля при $t \to \infty$, следует существование постоянной $c > 0$ такой, что

$$v(t,x(t),\psi) \leqslant v(t_0,x_0,\psi) - \frac{c}{\Gamma(q)}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{q-1}d(\|x(s)\|)\,ds, \tag{12}$$

где $d \in K$-классу Хана. Из неравенства (12) получим

$$v(t,x(t),\psi) \leqslant \lambda_M(B)b_1(\|x_0\|) - \frac{cd(\delta)}{\Gamma(q)}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{q-1}ds \leqslant \lambda_M(B)b_1(\|x_0\|) - \frac{cd(\delta)}{\Gamma(1+q)}(t-t_0)^q.$$

Отсюда при $t = t_0$ получим

$$0 < \lambda_m(A)a(\delta(\varepsilon)) \leqslant v(t_0+T, x(t_0+T),\psi) \leqslant \lambda_M(B)b_1(\delta_0) - \frac{cd(\delta)}{\Gamma(1+q)}T^q \leqslant 0.$$

Это неравенство противоречит предположению о существовании $t_1 \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$ таких, что $\|x(t_1)\| \geqslant \delta(\varepsilon)$. Поэтому при всех $t \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$ верна оценка $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$, как только $\|x_0\| < \delta_0$. Отсюда следует равномерная асимптотическая устойчивость состояния $x = 0$ системы (3).

Следствие 1. *Если в матричнозначной функции* (4) *элементы* $u_{ij}(t, x) \equiv 0$ *при всех* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *и при этом выполняются все условия теоремы 1, то состояние* $x = 0$ *системы* (3) *эквиустойчиво (равномерно устойчиво) соответственно.*

Следствие 2. *Если среди элементов* $u_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *матричной функции* (4) *существует хотя бы один, для которого* $u_{ks}(t, x) \neq 0$ *и* $u_{ks} \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, *и при этом выполняются все условия теоремы 2, то состояние* $x = 0$ *системы* (3) *асимптотически устойчиво.*

В заключение следует отметить, что потенциальные возможности дробной производной Капуто в теории устойчивости движения по Ляпунову систем вида (3) все еще не раскрыты. В этом направлении, по мнению автора, представляют интерес следующие вопросы:

построение алгоритма проверки выполнения условия *2* теоремы 1, т. е. условий убывания функции $v(t, x(t), \psi)$ вдоль любого решения $x(t)$ системы (3), остающегося в области определения функции $v(t, x, \psi)$;

построение критериев устойчивости линейных уравнений с дробными производными на конечном и неограниченном интервале времени;

развитие численных методов и вычислительных алгоритмов для построения решений системы (3);

установление связей между дробной производной Капуто и фракталами в нелинейной динамике.

1. *Oldham K. B., Spanier J.* The fractional calculus. – New York: Academic Press, 1974. – 248 p.
2. *Samko S. G., Kilbas A. A., Maritchev O. I.* Fractional integrals and derivatives: theory and applications. – New York: Gordon and Breach, 1993. – 688 p.
3. *Fractional* calculus and its applications // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 457 / Ed. B. Ross. – Berlin: Springer, 1975. – 381 p.
4. *Podlubny I.* Fractional differential equations. – London: Academic Press, 1999. – 368 p.
5. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent. II // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. – 1967. – **13**, Issue 5. – P. 529–539.
6. *Martynyuk A. A.* Stability of motion: the role of multicomponent Liapunov's functions. – Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2007. – 329 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 02.07.2009

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

On the Lyapunov method for equations with fractional derivatives

The Lyapunov stability theory via matrix-valued functions is extended to fractional differential systems. We use Caputo-type fractional differential equations and Lyapunov-like functions.