

А. С. Полищук, Ю. А. Черняков

**Учет двойникования в теории микродеформации***(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. С. Гудрамовичем)*

*Сформульовано варіант теорії пластичності, що враховує мікродеформації ковзанням і двійникуванням. Ефективність запропонованого варіанту теорії підтверджується порівнянням результатів теоретичних досліджень з відомими експериментальними даними на надпружну поведінку сплавів з пам'яттю форми.*

В настоящее время в рамках микроструктурного подхода достигнуты успехи в моделировании неупругого поведения поликристаллических металлов. Так, в теории пластичности, учитывающей микродеформации [1, 2], учет взаимодействий между зернами с различными ориентациями и пределами текучести позволил описать механическое поведение широкого класса поликристаллических металлов при сложном нагружении. В теории микродеформаций и ряде подобных теорий рассматривались только деформации пластического скольжения. Другой возможный механизм неупругого деформирования — механическое двойникование [3] — оставался за пределами внимания теории пластичности, поскольку в металлах, применяемых на практике, он проявляется при достаточно больших напряжениях. Однако в последнее время картина меняется, и использование металлов, в которых двойникование является основным механизмом образования больших неупругих деформаций, участилось.

Механическое двойникование имеет ряд особенностей. Так, если пластический сдвиг по кристаллографическим плоскостям не изменяет кристаллическую решетку и не порождает никаких стимулов для восстановления приобретенных кристаллом деформаций, то при двойниковании новая конфигурация кристалла тождественна исходной, но повернута в пространстве, что в условиях стесненной деформации порождает усилия, стремящиеся вернуть кристалл в исходное состояние. За счет этого в материале могут возникать большие обратимые деформации.

В настоящей работе предлагается вариант теории пластичности, учитывающий двойникование, который строится на базе основных положений теории микродеформации.

В теории микродеформации представительный макрообъем рассматривается как множество взаимодействующих микрочастиц с различной ориентацией, которая задается ориентационным тензором микрочастицы  $\hat{\mu}$ . Множество ориентационных тензоров всех микрочастиц будем обозначать  $\Omega$ , а сами тензоры считать направляющими:

$$\hat{\mu} : \hat{\mu} = 1,$$

где “:” здесь и далее обозначает свертку тензоров по двум индексам. Будем рассматривать два вида неупругой деформации на микроуровне: пластическая деформация  $\hat{\varepsilon}_p(\hat{\mu})$  и деформация двойникованием  $\hat{\varepsilon}_{tw}(\hat{\mu})$ , которые определяются локальными законами течения и двойникования, соответственно:

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_p(\hat{\mu}) = \dot{\lambda}(\hat{\mu})\hat{\mu},$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_{tw}(\hat{\mu}) = \dot{\eta}(\hat{\mu})\hat{\mu},$$

где  $\dot{\lambda}(\hat{\mu})$  — интенсивность скорости пластических деформаций;  $\dot{\eta}(\hat{\mu})$  — интенсивность скорости двойникового микрочастицы,  $0 < \eta(\hat{\mu}) < \eta_0$ ;  $\eta_0$  — константа материала, задающая максимально возможную для микрочастицы деформацию двойникованием.

Введем в рассмотрение наряду с множеством микрочастиц, в которых происходит пластическое скольжение  $\Omega^1$ , множества микрочастиц, в которых происходит двойникование  $\Omega^2$  и раздвойникование  $\Omega^3$ :

$$\begin{aligned}\Omega^1 &= \{\hat{\mu} : \langle \sigma \rangle : \hat{\mu} - T^1(\hat{\mu}) = 0, \dot{\lambda}(\hat{\mu}) > 0\}, \\ \Omega^2 &= \{\hat{\mu} : \langle \sigma \rangle : \hat{\mu} - T^2(\hat{\mu}) = 0, \dot{\eta}(\hat{\mu}) > 0, \eta(\hat{\mu}) < \eta_0\}, \\ \Omega^3 &= \{\hat{\mu} : \langle \sigma \rangle : \hat{\mu} - T^3(\hat{\mu}) = 0, \dot{\eta}(\hat{\mu}) < 0, \eta(\hat{\mu}) > 0\},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\langle \sigma \rangle$  — тензор напряжений макрообъема;  $T^1(\hat{\mu})$ ,  $T^2(\hat{\mu})$ ,  $T^3(\hat{\mu})$  — текущие значения локальных пределов пластичности, двойникового и раздвойникового соответственно.

Записанные условия определяют три граничные поверхности в шестимерном тензорном пространстве: поверхность пластичности, поверхность двойникового и поверхность раздвойникового. В начальном недеформированном и ненапряженном состоянии поверхности геометрически подобны и их размеры определяются следующими соотношениями:

$$T^1(\hat{\mu}) = \tau^1, \quad T^2(\hat{\mu}) = \tau^2, \quad T^3(\hat{\mu}) = \tau^3,$$

где  $\tau^1$ ,  $\tau^2$ ,  $\tau^3$  — параметры модели, определяющие соответственно начальный предел пластичности, двойникового и раздвойникового.

Начальные формы поверхностей связаны с кинематикой процесса деформирования, которая задается структурой множества ориентационных тензоров микрочастиц  $\Omega$ . Положим, что множество  $\Omega$  образовано всевозможными тензорами вида [4, 5]:

$$\hat{\mu} = \text{tg } \varphi \hat{e} - \left( \frac{\cos \xi}{\sqrt{6}} + \frac{\sin \xi}{\sqrt{2}} \right) \vec{j}_1 \vec{j}_1 - \left( \frac{\cos \xi}{\sqrt{6}} - \frac{\sin \xi}{\sqrt{2}} \right) \vec{j}_2 \vec{j}_2 + \frac{2 \cos \xi}{\sqrt{6}} \vec{j}_3 \vec{j}_3,$$

где  $\vec{j}_k$  — тройка взаимно ортогональных векторов, определяющих главные направления тензора  $\hat{\mu}$ ;  $\xi$  — параметр из отрезка  $[0; \pi/3]$ , одинаковый для всех  $\hat{\mu}$  и определяющий след поверхности на девиаторной плоскости;  $\varphi \in [0; \pi/2)$  — параметр, задающий влияние первого инварианта тензора напряжений на форму поверхности.

Предложенный выбор общего вида ориентационного тензора дает возможность учесть влияние первого, второго и третьего инвариантов тензора напряжений на необратимую деформацию. Параметр  $\varphi$  имеет смысл, аналогичный углу трения в известных теориях пластичности: ненулевые значения  $\varphi$  задают предельные поверхности, имеющие вид конуса в пространстве главных напряжений. Значение параметра  $\xi$  определяет след поверхности на девиаторной плоскости. При  $\xi = \pi/6$  след имеет вид шестигранника (условие максимума касательных напряжений Кулона–Треска), а при  $\xi = \pm\pi/3$  — вид правильного треугольника (условие максимума нормальных напряжений). Значения параметра  $\xi$ , отличные от  $\pi/6$ , позволяют учесть различие диаграмм растяжения и сжатия у материалов, не чувствительных к гидростатическому давлению.

Макроскопические составляющие неупругой деформации определяются как интегралы по соответствующим множествам:

$$\begin{aligned}\langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle &= \int_{\Omega^1} \dot{\hat{\varepsilon}}_p(\hat{\mu}') d\Omega', \\ \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{tw} \rangle &= \int_{\Omega^2 \cup \Omega^3} \dot{\hat{\varepsilon}}_{tw}(\hat{\mu}') d\Omega'.\end{aligned}\tag{2}$$

Полная деформация макрообъема  $\langle \hat{\varepsilon} \rangle$  представляется в виде суммы упругой деформации  $\langle \hat{\varepsilon}_e \rangle$ , пластической деформации  $\langle \hat{\varepsilon}_p \rangle$  и деформации двойникованием  $\langle \hat{\varepsilon}_{tw} \rangle$ :

$$\langle \dot{\hat{\varepsilon}} \rangle = \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_e \rangle + \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle + \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{tw} \rangle.\tag{3}$$

Размер и форма предельных поверхностей в произвольный момент времени определяется функциями  $T^1(\hat{\mu})$ ,  $T^2(\hat{\mu})$ ,  $T^3(\hat{\mu})$ . Законы эволюции этих функций выбираются с учетом соотношений, изложенных в [1]. Для пластического поведения этот закон имеет вид:

$$\begin{aligned}T^1(\hat{\mu}) &= T_1^1 + R_2^1 \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle : \hat{\mu} + R_3^1 \langle \dot{\lambda} \rangle + R_5^1 \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{tw} \rangle : \hat{\mu} + R_6^1 \langle \dot{\eta} \rangle, \\ T_1^1 &= \begin{cases} R_1^1 \dot{\lambda}(\hat{\mu}), & \hat{\mu} \in \Omega^1, \\ 0, & \hat{\mu} \notin \Omega^p, \\ R_4^1 \dot{\lambda}(\hat{\mu}), & -\hat{\mu} \in \Omega^1, \end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

где  $R_1^1$ ,  $R_2^1$ ,  $R_3^1$ ,  $R_4^1$  — константы материала, влияющие на его пластическое поведение;  $R_5^1$ ,  $R_6^1$  — константы материала, определяющие влияние двойникования на пластичность;  $\langle \dot{\lambda} \rangle$  — средняя скорость пластической деформации;  $\langle \dot{\eta} \rangle$  — средняя скорость деформации двойникованием:

$$\begin{aligned}\langle \dot{\lambda} \rangle &= \int_{\Omega^p} \dot{\lambda}(\hat{\mu}') d\Omega', \\ \langle \dot{\eta} \rangle &= \int_{\Omega^p} \dot{\eta}(\hat{\mu}') d\Omega'.\end{aligned}$$

Для процессов двойникования и раздвойникования законы эволюции имеют вид:

$$\begin{aligned}T^k(\hat{\mu}) &= T_1^k + R_2^k \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_{tw} \rangle : \hat{\mu} + R_3^k \langle \dot{\eta} \rangle + R_5^k \langle \dot{\hat{\varepsilon}}_p \rangle : \hat{\mu} + R_6^k \langle \dot{\lambda} \rangle, \\ T_1^k &= \begin{cases} R_1^k \dot{\lambda}(\hat{\mu}), & \hat{\mu} \in \Omega^k, \\ R_4^k \dot{\lambda}(\hat{\mu}), & \hat{\mu} \in \Omega^j, \\ 0, & \hat{\mu} \notin \Omega^k, \quad \hat{\mu} \notin \Omega^j, \end{cases}\end{aligned}\tag{5}$$

где  $k = 2$ ,  $j = 3$  для двойникования и  $k = 3$ ,  $j = 2$  — для раздвойникования;  $R_1^k$ ,  $R_2^k$ ,  $R_3^k$  — константы материала, влияющие на его упрочнение при двойниковании и раздвойниковании;  $R_4^k$  — константа, задающая степень взаимовлияния двойникования и раздвойникования;  $R_5^k$ ,  $R_6^k$  — константы материала, определяющие влияние пластичности на двойникование.

Предложенные здесь законы эволюции носят обобщенный характер и, как показали проведенные исследования, для многих реальных материалов возможен ряд упрощений, уменьшающих число констант теории.

Рассмотрим теперь наиболее простой метод решения задачи построения траектории нагружения по известной траектории деформирования (и наоборот) в рамках предложенной теории. Дифференцируя условия пластичности, двойникования и раздвойникования (1), получим

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma} \rangle : \hat{\mu} - \dot{T}^1(\hat{\mu}) &= 0, & \hat{\mu} \in \Omega^1, \\ \langle \dot{\sigma} \rangle : \hat{\mu} - \dot{T}^2(\hat{\mu}) &= 0, & \hat{\mu} \in \Omega^2, \\ \langle \dot{\sigma} \rangle : \hat{\mu} - \dot{T}^3(\hat{\mu}) &= 0, & \hat{\mu} \in \Omega^3. \end{aligned}$$

Последние соотношения, с учетом законов эволюции (4), (5), приводят к системе трех уравнений для определения  $\dot{\lambda}$  и  $\dot{\eta}$ . Далее, с помощью (1) определяются области активной неупругой деформации  $\Omega^k$ , которые, будучи известными, позволяют с помощью (2) и (3) получить связь между скоростью изменения напряжений и скоростью деформации в виде

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = \tilde{C} : \langle \dot{\varepsilon} \rangle, \quad (6)$$

где  $\tilde{C}$  — тензор четвертого ранга, зависящий от конечных значений напряжений, деформаций, текущих пределов текучести и являющийся однородной функцией нулевой степени от скорости нагружения; выражение для тензора  $\tilde{C}$  опущено здесь из-за своей громоздкости.

Соотношение (6) с учетом указанных свойств тензора  $\tilde{C}$  может быть проинтегрировано известными методами, например прямым методом Эйлера, для произвольного вида нагружения.

Очевидно, что для проверки теории интерес представляют, прежде всего, материалы, в которых двойникование преобладает. Для демонстрации специфических возможностей предложенной теории остановимся на ее варианте, который не учитывает механизм пластического сдвига вовсе. Это допущение справедливо, например, при сверхупругом поведении сплавов с памятью формы. Эффект сверхупругости состоит в том, что материал, нагруженный до напряжений, значительно превышающих предел текучести, приобретает свою исходную форму после снятия нагрузки [3]. Такое специфическое поведение является результатом обратимого кристаллографического превращения, основанного на двойниковании. Для иллюстрации здесь приводится результат сравнения расчета с экспериментом [6] на сложное нагружение образца из никелида титана. Из экспериментов на простое нагружение были подобраны следующие значения констант теории:  $E = 40$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $R_1^2 = 190$  МПа,  $R_1^3 = 1,4R_1^2$ ,  $R_2^2 = R_3^2 = R_2^3 = R_3^3 = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\xi = 0,15$ ,  $\tau^2 = 210$  МПа,  $\tau^3 = 0,8\tau^2$ . В экспериментах на сложное нагружение рассматривались траектории деформирования (рис. 1, а, в) в пространстве  $\varepsilon_{12} - \varepsilon_{11}$  (сдвиговая и осевая деформация). На рис. 1, б, г приведено сравнение экспериментальных (штриховые линии) и расчетных (сплошные линии) значений напряжений  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{11}$ .

Наряду с рассмотренным частным случаем теории изучался и ее общий вариант. Сравнения численных результатов с известными экспериментальными данными [7, 8] подтвердили эффективность предлагаемой теории. В частности, получено достоверное описание накопления пластической деформации при циклическом нагружении сверхупругого сплава

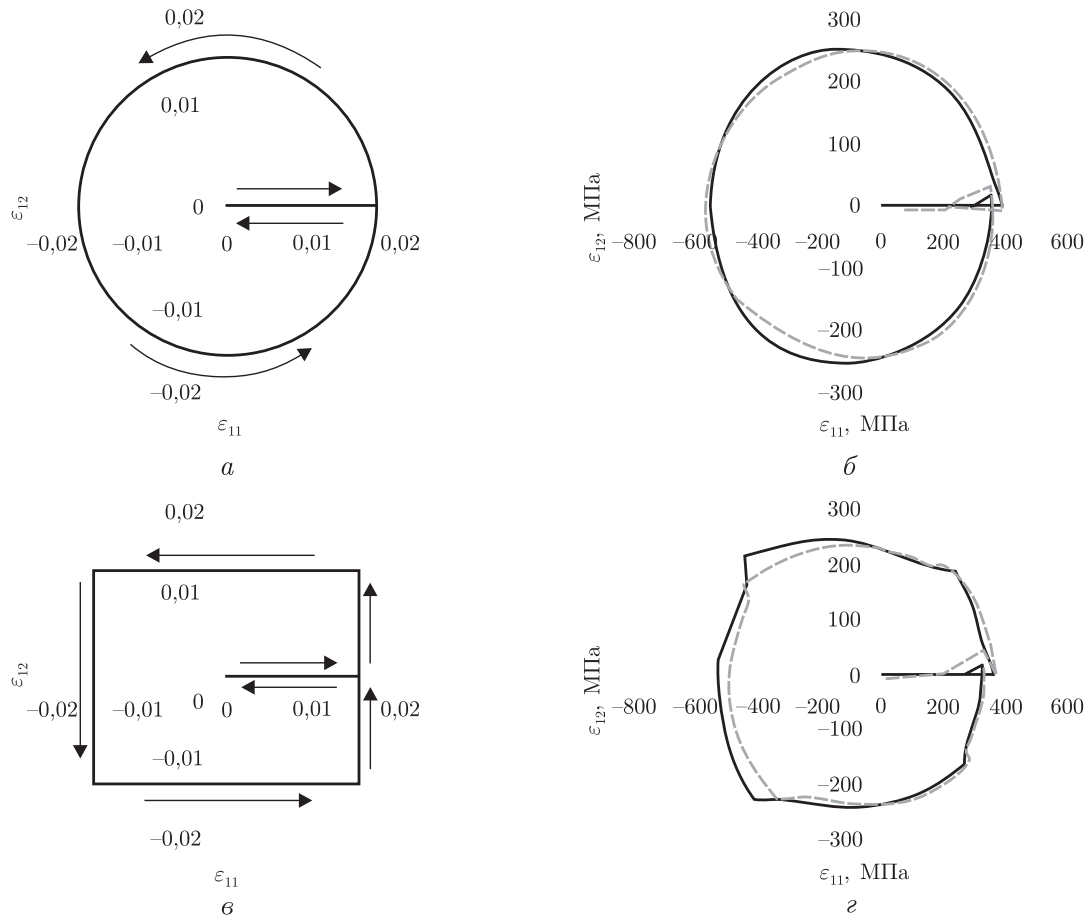


Рис. 1. Сложное нагружение: а, б — по круговой траектории; в, г — по прямоугольной траектории

с памятью формы и упрочнения сплавов, в которых пластичность и двойникование проявляются в равной степени.

Предложенный вариант теории, в дополнение ко всем возможностям теории микродеформации, позволяет учесть механизм неупругого деформирования, основанный на двойниковании, тем самым расширяя класс описываемых поликристаллических металлов. Проведенное сравнение теоретических исследований с экспериментальными данными подтверждает эффективность теории. Важным преимуществом предложенного подхода является то, что для описания поведения реального материала было использовано небольшое число констант, имеющих простой физический смысл.

1. Кадашевич Ю. И., Новожиллов В. В., Черняков Ю. А. Теория пластичности, учитывающая микродеформации // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 4. – С. 821–823.
2. Кадашевич Ю. И., Новожиллов В. В., Черняков Ю. А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // Прикл. мех и мат. – 1986. – **50**, № 6. – С. 890–897.
3. Лихачев В. А., Кузьмин С. Л., Каменцева З. П. Эффект памяти формы. – Ленинград: Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1987. – 218 с.
4. Черняков Ю. А., Шнейдер В. П. Учет повреждаемости в теории микродеформаций // Вестн. Днепропетр. ун-та. – 2006. – № 2. – С. 205–210.
5. Полищук А. С., Черняков Ю. А. Обобщенный вариант теории микродеформаций // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – **44**. – С. 158–163.

6. *Yong Liu et al.* Cyclic deformation of NiTi shape memory alloys // Mater. Sci. Eng. A. – 1999. – **15**. – P. 673–678.
7. *Lou X. Y. et al.* Hardening evolution of AZ31B Mg sheet // Internat. J. of Plasticity. – 2007. – **23**. – P. 44–86.

*Днепропетровский национальный университет  
им. О. Гончара*

*Поступило в редакцию 20.07.2009*

**A. S. Polishchuk, Ya. A. Chernyakov**

### **Consideration of twinning in the theory of microstrains**

*A variant of plasticity theory which accounts both sliding and twinning microstrains is formulated. The theory is verified by comparing the theoretical results with available experimental data on the superelastic behavior of shape memory alloys.*