ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.951

Д. С. Джумабаев, А. Т. Асанова

Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

Досліджено лінійну нелокальну крайову задачу з даними на характеристиках для систем гіперболічних рівнянь другого порядку. Встановлено необхідні та достатні умови коректної розв'язності дослідженої задачі в термінах початкових даних.

Рассматривается линейная нелокальная краевая задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений со смешанной производной с двумя независимыми переменными на $\overline{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + \\ + S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t} + S_0(x)u(T,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно и n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Функция $u(t,x) \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, имеющая частные производные $\partial u(t,x)/\partial x \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $\partial u(t,x)/\partial t \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $\partial^2 u(t,x)/\partial t\partial x \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \overline{\Omega}$ (при этом функция на границе Ω имеет односторонние производные) и выполнены краевые условия (2), (3).

Нелокальные краевые задачи для систем гиперболических уравнений изучались многими исследователями (обзор и библиография по ним содержатся в [1–3]). В работах [4, 5] для исследования и решения нелокальной краевой задачи (1)–(3) было предложено обобщение метода параметризации [6, 7], разработанного для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. На его основе были получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3) в терминах исходных данных.

Отметим, что для задачи (1)–(3) из существования только нулевого решения соответствующей однородной краевой задачи не вытекает существование единственного классического решения задачи (1)–(3). Это подтверждается следующим примером.

Пример 1. На $[0,1]\times[0,1]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + u + 1, \tag{1'}$$

$$u(0,x) = u(1,x), \qquad x\in[0,1], \tag{2'}$$

$$u(t,0) = 0, \qquad t\in[0,1], \tag{3'}$$

Решения соответствующего $(1')$ однородного уравнения, удовлетворяющие условию $(3')$, имеют вид $u(t,x) = e^{(x-1/2)t}C(x)$, где $C(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая на $[0,1]$ функция и $C(0)=0$. Нетрудно убедиться в том, что, хотя соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, неоднородная задача $(1')$–$(3')$ не имеет классического решения.

В работах [8–10] вводятся новые неизвестные функции $v(t,x) = \partial u(t,x)/\partial x$, $w(t,x) = \partial u(t,x)/\partial t$ и задача (1)–(3) сводится к следующей эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + B(t,x)w(t,x) + C(t,x)u(t,x) + f(t,x), \qquad (t,x)\in\overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} P_2(x)v(0,x) + S_2(x)v(T,x) = \varphi(x) - P_1(x)w(0,x) - P_0(x)u(0,x) - \\ - S_1(x)w(T,x) - S_0(x)u(T,x), \qquad x\in[0,\omega], \end{aligned} \tag{5}$$

$$u(t,x) = \psi(t) + \int\limits_0^x v(t,\xi)\,d\xi, \qquad w(t,x) = \dot\psi(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v(t,\xi)}{\partial t}d\xi. \tag{6}$$

В задаче (4)–(6) условие $u(t,0)=\psi(t)$ учтено в соотношениях (6). Тройка непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $\{v(t,x), u(t,x), w(t,x)\}$ называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(t,x)\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ имеет непрерывную на $\overline{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(t,x)$, $w(t,x)$ связаны с $v(t,x)$, $\partial v(t,x)/\partial t$ функциональными соотношениями (6).

При фиксированных $w(t,x)$, $u(t,x)$ в задаче (4)–(6) требуется найти решение из $C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ однопараметрического семейства двухточечных краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которое требует отдельного исследования.

Рассмотрим семейство двухточечных краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t,x)v + F(t,x), \qquad t\in[0,T], \qquad x\in[0,\omega], \qquad v\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

$$P_2(x)v(0,x) + S_2(x)v(T,x) = \Phi(x), \qquad x\in[0,\omega]. \tag{8}$$

Непрерывная функция $v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, имеющая на $\overline{\Omega}$ непрерывную производную по t, называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе (7) и условию (8) соответственно при всех $(t,x) \in \overline{\Omega}$, $x \in [0,\omega]$.

При фиксированных $x \in [0,\omega]$ задача (7), (8) является линейной двухточечной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая различными методами была исследована многими авторами (см. [11]). При изменении переменной x на $[0,\omega]$ получим семейство двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение 1. Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(t,x)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$ она имеет единственное классическое решение $u(t,x)$ и справедливо неравенство

$$\max\biggl(\max_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\|u(t,x)\|,\ \max_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\biggl\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\biggr\|,\ \max_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\biggl\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\biggr\|\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant K\max\Bigl(\max_{(t,x)\in\overline{\Omega}}\|f(t,x)\|,\ \max_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|,\ \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\psi}(t)\|,\ \max_{x\in[0,\omega]}\|\varphi(x)\|\Bigr),$$

где константа K не зависит от $f(t,x)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$.

Определение 2. Задача (7), (8) называется корректно разрешимой, если для любых $F(t,x)$, $\Phi(x)$ она имеет единственное решение $v(t,x) \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ и для него справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t,x)\| \leqslant K(x)\max\Bigl(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\Bigr),$$

где $K(x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $F(t,x)$, $\Phi(x)$.

В [10] была показана эквивалентность корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений (1)–(3) и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8).

В настоящей работе устанавливаются признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений (1)–(3).

Возьмем шаг $h > 0$: $Nh = T$ $(N = 1, 2, \ldots)$ и произведем разбиение $[0,T) \times [0,\omega] = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh) \times [0,\omega]$. Пусть

$$D_{\nu r}(h,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1,x)\,d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(\tau_2,x)\,d\tau_2 d\tau_1 + \cdots +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1,x)\cdots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)\,d\tau_\nu\cdots d\tau_1,$$

$$Q_\nu(h,x) =$$

$$= \begin{vmatrix} hP_2(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & hS_2(x)[I+D_{\nu N}(h,x)] \\ I+D_{\nu 1}(h,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(h,x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu N-1}(h,x) & -I \end{vmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности $(n \times n)$.

Так как $(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(h,x)$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, то справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *$(nN \times nN)$-матрица $Q_\nu(h,x)$ при $x \in [0,\omega]$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $(n \times n)$-матрица*

$$M_\nu(x) = P_2(x) + S_2(x) \prod_{s=N}^{1} [I + D_{\nu s}(h,x)].$$

Лемма 2. *Если матрица $M_\nu(x)$ обратима, то $[Q_\nu(h,x)]^{-1} = \{d_{rj}(x)\}$, r, $j = \overline{1,N}$, где*

$$d_{11}(x) = h^{-1} M_\nu^{-1}(x),$$

$$d_{1k}(x) = M_\nu^{-1}(x) S_2(x) \prod_{s=N}^{k} [I + D_{\nu s}(h,x)], \qquad 1 < k \leqslant N,$$

$$d_{rr}(x) = [I + D_{\nu,r-1}(h,x)] d_{r-1,r}(x) - I, \qquad r = 2,3,\dots,N,$$

$$d_{rj}(x) = [I + D_{\nu,r-1}(h,x)] d_{r-1,j}(x), \qquad j \neq r.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ найдется $h(\nu) > 0$: $Nh(\nu) = T$, $N = 1,2,\dots$, матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства:*

a) $\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\| \leqslant \gamma_\nu(h,x)$,

b) $q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x) \max(h\|S_2(x)\|, 1) \left[e^{\alpha(x)h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right] \leqslant \chi < 1,$

где $\gamma_\nu(h,x)$ — положительная, непрерывная по $x \in [0,\omega]$ функция, $\alpha(x) = \max_{t \in [0,T]} \|A(t,x)\|$, $\chi = \text{const}$.

Теорема 2. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для любого $h > 0$: $Nh = T$, $N = 1,2,\dots$, существует $\nu(h)$, при котором матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства a, b теоремы 1.*

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
3. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИРАН. – Москва, 1998. – Т. 222. – С. 1–191.

4. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 2002. – **42**, № 11. – С. 1673–1685.
5. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 10. – С. 1343–1354.
6. *Джумабаев Д. С.* Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. АН КазССР. – 1988. – № 1. – С. 48–52.
7. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50–66.
8. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. – 2002. – № 3. – С. 20–26.
9. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. АН. – 2003. – **391**, № 3. – С. 295–297.
10. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 3. – С. 337–346.
11. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

Институт математики
МОН Республики Казахстан, Алматы

Поступило в редакцию 02.09.2009

D. S. Dzhumabaev, A. T. Asanova

The criteria of correct solvability of a linear nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations

A linear nonlocal boundary-value problem with data on characteristics for systems of hyperbolic equations of the second order is considered. The necessary and sufficient conditions of correct solvability of the problem in the terms of initial data are established.