УДК 517.91:532.2

О. М. Нікітіна

Запровадження гібридного інтегрального перетворення Бесселя–Фур'є–Ейлера на полярній осі $r \geqslant R_0 > 0$

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене на полярній осі $r \geqslant R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Бесселя–Фур'є–Ейлера.

Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним з ефективних методів одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткованих у роботі [1]. Основи теорії ГІП знаходимо в роботі [2]. У даному повідомленні запроваджується один з типів ГІП.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2^+ = \left\{r \colon r \in (R_0, R_1) \bigcup (R_1, R_2) \bigcup (R_2, \infty); R_0 > 0\right\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)a_3^2 B^*_{\alpha_2}, \tag{1}$$

$\theta(x)$ — одинична функція Хевісайда [3]; $a_j > 0$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $j = \overline{1,3}$.

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя B_{ν,α_1} [4], Ейлера $B^*_{\alpha_2}$ [5] та Фур'є d^2/dr^2 [5]:

$$B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2}, \qquad B^*_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2, \qquad \nu \geqslant \alpha_1.$$

Означення. За область визначення ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; g_2''(r); B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}[r^\gamma g_3(r)] = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0, \qquad j, k = 1, 2. \tag{3}$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $a_j > 0$, $\alpha_{11}^0 \leqslant 0$, $\beta_{11}^0 \geqslant 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$, $\alpha_{jm}^k \geqslant 0$, $\beta_{jm}^k \geqslant 0$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $2\alpha_j + 1 > 0$.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21}c_{22}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{a_1^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{a_2^2}, \qquad \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 + \theta(r-R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$$

і скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int\limits_{R_0}^{\infty} u(r)v(r)\sigma(r)\,dr \equiv \int\limits_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr +$$

$$+ \int\limits_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr, \qquad u \in G, \qquad v \in G. \tag{4}$$

Для $u \in G$ та $v \in G$ з умов спряження (3) випливає базова тотожність

$$[u_k(r)v_k'(r) - v_k(r)u_k'(r)]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r) - u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}. \tag{5}$$

На основі базової тотожності (5), властивостей функцій $u \in G$ та $v \in G$ й структури σ_1, σ_2, σ_3 встановлюємо рівність

$$(\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[u], v) = (u, \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[v]). \tag{6}$$

Рівність (6) означає, що ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [6]. Оскільки ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$ і йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \sum_{j=1}^{2}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta) + \theta(r-R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \tag{7}$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ знайдемо як обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Ейлера

$$\begin{aligned} &(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \qquad r \in (R_0, R_1), \\ &\left(\frac{d^2}{dr^2 + b_2^2}\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \qquad r \in (R_1, R_2), \\ &(B_{\alpha_2}^* + b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \qquad r \in (R_2, \infty) \end{aligned} \tag{8}$$

за однорідною крайовою умовою в точці $r = R_0$ та умовами спряження (3); $b_j^2 = (\beta^2 + k_j^2)$, $k_j^2 \geqslant 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя першого роду $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 + b_2^2)v = 0$ утворюють тригонометричні функції $v_1 = \cos b_2 r$ та $v_2 = \sin b_2 r$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r)$ [5].

Якщо покласти

$$
\begin{aligned}
&V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r) + B_1 N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r), \qquad r \in (R_0, R_1),\\
&V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 \cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r, \qquad r \in (R_1, R_2),\\
&V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r) + B_3 r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r), \qquad r \in (R_2, \infty),
\end{aligned} \tag{9}
$$

то крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення шести величин A_j, B_j $(j = \overline{1,3})$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)A_1 + u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)B_1 = 0,\\
&u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1 + u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)B_1 - v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2 - v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2 = 0, \qquad j = 1,2,\\
&v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2 - Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)A_3 - Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)B_3 = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Алгебраїчна система (10) сумісна. Якщо взяти $A_1 = -A_0 u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)$, $B_1 = A_0 u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)$, де A_0 підлягає вибору, то перше рівняння системи (10) стає тотожністю, а решта рівнянь утворюють дві послідовно незалежні алгебраїчні системи по два рівняння в кожній.

У системі (10) беруть участь такі функції:

$$
u^{m1}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_m) = \left(\alpha^m_{j1}\frac{\nu-\alpha_1}{R_m} + \beta^m_{j1}\right)J_{\nu,\alpha_1}(b_1R_m) - \alpha^m_{j1}b_1^2R_m J_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_m), \quad m = 0,1,
$$

$$
u^{m2}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_m) = \left(\alpha^m_{j1}\frac{\nu-\alpha_1}{R_m} + \beta^m_{j1}\right)N_{\nu,\alpha_1}(b_1R_m) - \alpha^m_{j1}b_1^2R_m N_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_m),
$$

$$
j,k,i = 1,2,
$$

$$
v^{i1}_{jk}(b_2R_m) = -\alpha^i_{jk}b_2\sin b_2R_i + \beta^i_{jk}\cos b_2R_i; v^{i2}_{jk}(b_2R_m) = \alpha^i_{jk}b_2\cos b_2R_i + \beta^i_{jk}\sin b_2R_i,
$$

$$
Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_m) = [(\beta^2_{j2} - \alpha_2R_2^{-1}\alpha^2_{j2})\cos(b_2\ln R_2) - \alpha^2_{j2}b_3R_2^{-1}\sin(b_2\ln R_2)]R_2^{-\alpha_2},
$$

$$
Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2) = [(\beta^2_{j2} - \alpha_2R_2^{-1}\alpha^2_{j2})\sin(b_2\ln R_2) + \alpha^2_{j2}b_3R_2^{-1}\cos(b_2\ln R_2)]R_2^{-\alpha_2}, \quad i = 1,2.
$$

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (10) за стандартною схемою [7] й підстановки отриманих значень A_j, B_j у рівності (9) маємо функції

$$
\begin{aligned}
&V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = \frac{c_{21}c_{22}b_2b_3}{R_2^{2\alpha_2+1}}[u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)N_{\nu,\alpha_1}(b_1r) - u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)],\\
&V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = \frac{c_{22}b_3}{R_2^{2\alpha_2+1}}[\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)\varphi^1_{22}(b_2R_1,b_2r) -\\
&\qquad - \delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)\varphi^1_{12}(b_2R_1,b_2r)],\\
&V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = \omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_2}\cos(b_3\ln r) - \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_2}\sin(b_3\ln r).
\end{aligned} \tag{11}
$$

У рівностях (11) позначення загальноприйняті [2].

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної вектор-функції $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta) = \beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$$

дозволяє визначити пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ [2]:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int\limits_{R_0}^{\infty} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)\,dr \equiv \widetilde{g}(\beta), \qquad g(r) \in G, \tag{12}$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \widetilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\,d\beta \equiv g(r). \tag{13}$$

Математичним обгрунтуванням правил (12), (13) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція*

$$f(r) = [\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1+1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\cdot 1 + \theta(r-R_2)r^{\alpha_2-1/2}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $[R_0,\infty)$*, то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\int\limits_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)\,d\rho d\beta. \tag{14}$$

Доведення. В основі доведення теореми знаходиться невласний подвійний інтеграл

$$I \equiv \frac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\,d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)\,dr = \Psi(\beta), \tag{15}$$

якщо $\lambda = \beta \in (0,\infty)$. Якщо $\lambda = \beta \overline{\in} (0,\infty)$, то $I = 0$.

Рівність (15) одержується методом дельта-подібної послідовності — ядро Діріхле. При цьому функція $\Psi(\lambda)$ повинна бути неперервною, абсолютно сумовною з обмеженою варіацією, забезпечуючи абсолютну й рівномірну збіжність інтеграла за λ.

Припустимо, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \Psi(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\,d\beta. \tag{16}$$

Помножимо рівність (16) на вираз $V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$, λ — довільне додатне число, й проінтегруємо за r від $r = R_0$ до $r = \infty$. З урахуванням рівності (15) маємо функцію

$$\Psi(\lambda) = \int\limits_{R_0}^{\infty} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)\,dr.$$

Підставивши в рівність (16) функцію

$$\Psi(\beta) = \int\limits_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)\,d\rho,$$

приходимо до інтегрального зображення (14).

Зауваження. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в рівності (14) зліва замість $g(r)$ треба писати $[g(r-0)+g(r+0)]/2$.

Побудова алгебри ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ здійснюється за допомогою основної тотожності ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Визначимо величини та функції:

$$h_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}, \quad h_2 = a_2^2\sigma_2 c_{12}^{-1}, \quad Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta) = \left(\alpha^k_{i2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{i2}\right)V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},$$

$$\widetilde{g}_1(\beta) = \int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr, \qquad i,k=1,2;$$

$$\widetilde{g}_2(\beta) = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr, \qquad \widetilde{g}_3(\beta) = \int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція*

$$f = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; g_2''(r); B^*_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$$

неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \qquad j,k=1,2, \tag{17}$$

та крайові умови

$$\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr} + \beta^0_{11}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0,$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) - g_3(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr}\right) = 0, \tag{18}$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\widetilde{g}(\beta) -$$
$$- \sum_{j=1}^{3} k_j^2\widetilde{g}_j(\beta) + a_1^2\sigma_1(-\alpha^0_{11})^{-1}R_0^{2\alpha_1+1}V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)g_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} h_k[Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \tag{19}$$

Доведення. У справедливості рівності (19) переконаємося, якщо проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами, скористаємося властивостями функцій $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$, структурою σ_1, σ_2, σ_3 та базової тотожності на випадок, коли умови спряження неоднорідні:

$$[g_k'(r)V_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta) - g_k(r)V_{\nu,(\alpha);k}'(r,\beta)]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21}}{c_{1k}}[g_{k+1}'(r)V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta) -$$

$$- g_{k+1}(r)V_{\nu,(\alpha);k+1}'(r,\beta)]\Big|_{r=R_k} + \frac{1}{c_{1k}}[Z_{\nu,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}].$$

Логічну схему застосування запровадженого формулами (12), (13) ГІП покажемо на одній з типових задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

Задача квазістатики. Побудувати обмежений в області $D = \{(t,r)\colon t \in (0,\infty), r \in I_2^+\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \chi_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), \qquad r \in (R_0,R_1),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \chi_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t,r), \qquad r \in (R_1,R_2),\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \chi_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\alpha_2}^*[u_3] = f_3(t,r), \qquad r \in (R_2,\infty),
\end{aligned} \tag{20}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), \qquad r \in (R_{j-1};R_j), \qquad j=\overline{1,3}; \qquad R_3 = \infty, \tag{21}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1(t,r)\Big|_{r=R_0} = g_0(t), \qquad \lim_{r\to\infty}[r^\gamma u_3(t,r)] = 0 \tag{22}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), \qquad j,k=1,2. \tag{23}$$

Розв'язання. За відомою логічною схемою [2] одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (20)–(23):

$$\begin{aligned}
u_j(t,r) = &\sum_{k=1}^3 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)[f_k(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_k(\rho)]\sigma_k\varphi_k(\rho)\,d\rho d\tau +\\
&+ \int_0^t W_{\nu,(\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)\,d\tau +\\
&+ \sum_{k=1}^2 h_k \int_0^t [\mathcal{R}_{\nu,(\alpha);12}^{k,j}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau) - \mathcal{R}_{\nu,(\alpha);22}^{k,j}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]\,d\tau,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$j=\overline{1,3}, \qquad \varphi_1(r) = r^{2\alpha_1+1}, \qquad \varphi_2(r) = 1, \qquad \varphi_3(r) = r^{2\alpha_2-1}, \qquad R_3 = \infty.$$

У рівностях (24) беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі:

1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta) V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\,d\beta, \quad j,k=\overline{1,3}, \tag{25}$$

породжені неоднорідністю системи;

2) функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);1j}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}(-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta) V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\times$$
$$\times\,\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\,d\beta a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}, \qquad j=\overline{1,3}, \tag{26}$$

породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$;

3) функції Гріна

$$\mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t} V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta) Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\,d\beta, \tag{27}$$

$$i,k=1,2, \qquad j=\overline{1,3},$$

породжені неоднорідністю умов спряження.

Зауважимо, що інтегральне зображення (24) розв'язку даної параболічної задачі носить алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. *Уфлянд Я. С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Ленинград, 1976. – С. 93–106.
2. *Ленюк М. П., Шинкарик М. І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Ч. 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.
4. *Ленюк М. П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
7. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – Москва: Наука, 1971. – 432 с.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 735 с.

НТУ "Харківський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 18.02.2009

O. M. Nikitina

Introduction of a Bessel–Fourier–Euler hybrid integral transformation on the polar axis $r \geqslant R_0 > 0$

By the method of delta-like sequence (Dirichlet kernel), an integral transformation generated on the polar axis $r \geqslant R_0 > 0$ with two conjugate points by the Bessel–Fourier–Euler hybrid differential operator is introduced.