УДК 517.956.32

Член-кореспондент НАН України **Б. Й. Пташник, С. М. Репетило**

Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами

Досліджено крайову задачу з мішаними умовами для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння порядку $2n$ зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Встановлено умови коректності задачі та побудовано розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Для розв'язання проблеми малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Крайові задачі з даними на всій границі області для гіперболічних рівнянь не завжди є коректними, а їх розв'язність в обмежених областях пов'язана, взагалі, з проблемою малих знаменників. Коректність крайових задач типу Діріхле для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь (лінійних і слабко нелінійних) зі сталими та змінними коефіцієнтами досліджувалась у багатьох працях (див. [1–11] і бібліографію там).

У цій роботі, яка примикає до праці [9], досліджено у $(p+1)$-вимірній циліндричній області коректність крайової задачі з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння порядку $2n$ ($n \geqslant 1$) зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами, коли на нижній основі циліндра задано парні похідні за часовою змінною від шуканого розв'язку, на верхній основі — непарні похідні, а на бічній поверхні циліндра задано умови типу умов Діріхле.

1. В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} \colon t \in (0,T) \subset \mathbb{R}^1, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, де Ω — обмежена однозв'язна область з гладкою межею Γ, розглядаємо задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{2(r-1)} u(0,x)}{\partial t^{2(r-1)}} = \varphi_r(x), \qquad \frac{\partial^{2r-1} u(T,x)}{\partial t^{2r-1}} = \varphi_{n+r}(x), \qquad r = 1,\ldots,n, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$L^q u|_{\Sigma} = 0, \qquad q = 0,\ldots,n-1, \qquad \Sigma = \Gamma \times [0,T], \tag{3}$$

де $a_s \in \mathbb{R}^1$, $a_0 \neq 0$, диференціальний вираз $L := \sum\limits_{i,j=1}^{p} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x)$ — еліптичний в області Ω, $L^0 u = u$, $L^q u = L(L^{q-1}u)$, $q = 1,\ldots,n$.

2. Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = |s_1| + \cdots + |s_p|$, $\widehat{s} = (s_0, s_1, \ldots s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\widehat{s}| = |s_0| + |s_1| + \cdots + |s_p|$; $x = (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p$; $C^{j,\nu}$, $0 < \nu < 1$, — клас визначених в $\overline{\Omega}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють в $\overline{\Omega}$ умову Гельдера з показником ν, $A^{j,\nu}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$; $C^{(0,r)}(\overline{D})$ — банахів простір функцій

$\upsilon(t,x) := \upsilon(t,x_1,\ldots,x_p)$, які в області $\overline{D}$ неперервні за t та r раз неперервно диференційовні за x, $\|\upsilon\|_{C^{(0,r)}(\overline{D})} := \sum\limits_{|s|\leqslant r}\max\limits_{(t,x)\in\overline{D}}|\partial^{|s|}\upsilon(t,x)/(\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p})|$.

Припустимо, що $\overline{\Omega} \in A^{2n,\nu}$, $p_{ij}(x) \in C^{2n-1,\nu}$, $i,j=1,\ldots,p$, $q(x)\in C^{2n-2,\nu}$, $q(x) \geqslant 0$. Відомо [12, 13], що за вказаних припущень задача на власні значення

$$LX(x) = -\lambda X(x), \qquad X(x)|_\Gamma = 0 \tag{4}$$

має повну ортонормовану в просторі $L_2(\Omega)$ систему власних функцій $\Upsilon = \{X_k(x), k\in\mathbb{N}\}$, а відповідні власні значення λ_k, $k\in\mathbb{N}$, цієї задачі, множину яких позначимо через Λ, є різними і додатними; при цьому $X_k(x)\in C^{2n}(\overline{\Omega})$, $k\in\mathbb{N}$, і справедливі оцінки

$$c_0k^{2/p} \leqslant \lambda_k \leqslant c_1k^{2/p}, \qquad 0<c_0\leqslant c_1, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\right| \leqslant c_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}, \qquad |s|=0,1,\ldots,2n. \tag{6}$$

Тут і далі через c_j, $j=0,1,\ldots$, позначено додатні сталі, що не залежать від k.

3. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{7}$$

де кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, є розв'язком, відповідно, такої крайової задачі:

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}(-\lambda_k)^s = f_k(t), \qquad t\in(0,T), \qquad \lambda_k\in\Lambda, \tag{8}$$

$$u_k^{(2(r-1))}(0) = \varphi_{rk}, \qquad u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}, \qquad r=1,\ldots,n, \tag{9}$$

де φ_{jk} і $f_k(t)$ є коефіцієнтами розвинення функцій $\varphi_j(x)$ та $f(t,x)$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій Υ.

Припустимо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським в області D. Тоді всі корені $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\gamma^{n-s} = 0 \tag{10}$$

є різними та додатними, і для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (8), є такою: $\{w_{kj}(t) = \exp(\beta_jt),\ w_{k,n+j}(t) = \exp(-\beta_jt),\ j=1,\ldots,n\}$, де $\beta_j := \beta_j(\lambda_k) = i\sqrt{\gamma_j\lambda_k}$. При цьому характеристичний визначник задачі (8), (9) має вигляд

$$\Delta(\lambda_k) := \Delta(T,\lambda_k) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \beta_1^2 & \ldots & \beta_n^2 & \beta_1^2 & \ldots & \beta_n^2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \beta_1^{2(n-1)} & \ldots & \beta_n^{2(n-1)} & \beta_1^{2(n-1)} & \ldots & \beta_n^{2(n-1)} \\ \beta_1e^{\beta_1T} & \ldots & \beta_ne^{\beta_nT} & -\beta_1e^{-\beta_1T} & \ldots & -\beta_ne^{-\beta_nT} \\ \beta_1^3e^{\beta_1T} & \ldots & \beta_n^3e^{\beta_nT} & -\beta_1^3e^{-\beta_1T} & \ldots & -\beta_n^3e^{-\beta_nT} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \beta_1^{2n-1}e^{\beta_1T} & \ldots & \beta_n^{2n-1}e^{\beta_nT} & -\beta_1^{2n-1}e^{-\beta_1T} & \ldots & -\beta_n^{2n-1}e^{-\beta_nT} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^n \prod_{1\leqslant s<t\leqslant n} (\beta_t^2 - \beta_s^2)^2 \prod_{j=1}^{n} (\beta_j (e^{\beta_j T} + e^{-\beta_j T})). \tag{11}$$

Задача (8), (9) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\lambda_k) \neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2n}(\overline{D})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda, \forall m \in \mathbb{Z}_+) \qquad \sqrt{\gamma_j \lambda_k} T \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 7.5 з [14].

За умов (12) розв'язок задачі (1)–(3) формально зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j+1}^{(q)} \frac{[\varphi_{jk}\beta_q(e^{\beta_q(T-t)} + e^{-\beta_q(T-t)}) + \varphi_{n+j,k}(e^{\beta_q t} - e^{-\beta_q t})]}{(-1)^{n+j}\beta_q(e^{\beta_q T} + e^{-\beta_q T}) \prod\limits_{s=1, s\neq q}^{n} (\beta_q^2 - \beta_s^2)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right) X_k(x), \tag{13}$$

де $S_l^{(q)}$ — сума всіх можливих добутків елементів $\beta_1^2, \ldots, \beta_{q-1}^2, \beta_{q+1}^2, \ldots, \beta_n^2$, узятих по l штук у кожному добутку, $S_0^{(q)} \equiv 1$, $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, — функція Гріна відповідної задачі (8), (9), яка у квадраті $K_T = \{0 \leqslant t, \tau \leqslant T\}$ (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) визначається формулою

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) +$$

$$+ \sum_{s,r=1}^{n} \frac{g_{kt}^{(2r-2)}(0,\tau)\beta_s(e^{\beta_s(T-t)} + (-1)^n e^{-\beta_s(T-t)}) + g_{kt}^{(2r-1)}(T,\tau)((-1)^n e^{\beta_s t} - e^{-\beta_s t})}{\beta_s (-1)^{r+s} (S_{n-r+1}^{(s)})^{-1} (e^{\beta_s T} + e^{-\beta_s T}) \prod\limits_{l=1, l\neq s}^{n} (\beta_s^2 - \beta_l^2)}, \tag{14}$$

$$g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sign}(t-\tau)}{4} \sum_{q=1}^{n} \beta_q^{-1} \prod_{s=1, s\neq q}^{n} (\beta_q^2 - \beta_s^2)^{-1} [e^{\beta_q(t-\tau)} + (-1)^n e^{-\beta_q(t-\tau)}]. \tag{15}$$

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, довизначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

4. При дослідженні питання існування класичного розв'язку задачі (1)–(3) нам знадобляться такі твердження.

Лема 1. *Нехай* $\Phi(k)$ *— обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^1$*) чисел* $a > 0$ *нерівність*

$$\left| \Phi(k) - \frac{la}{\sqrt[p]{k}} \right| < \frac{1}{k^\beta}, \qquad \beta = 1 + \frac{1}{p} + \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \tag{16}$$

має не більше ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах k *і* l $(k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.4 з [11, гл. 1].

Лема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^1$*) чисел* T *нерівності*

$$\left|e^{i\sqrt{\gamma_q\lambda_k}T}+e^{-i\sqrt{\gamma_q\lambda_k}T}\right|\geqslant\frac{4T}{\pi}k^{-1-\varepsilon},\qquad q=1,\ldots,n, \tag{17}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k\in\Lambda$.

Доведення грунтується на елементарній нерівності $\sin x\geqslant 2x/\pi$ для $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, оцінках (5) та лемі 1.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти диференціального виразу* L *є достатньо гладкими, справджується умова* (12), $\varphi_j\in C^{2h_1}(\overline{\Omega})$, $L^{q_1}\varphi_j|_\Gamma=0$, $q_1=0,1,\ldots,h_1-1$, $\varphi_{n+j}\in C^{2h_2}(\overline{\Omega})$, $L^{q_2}\varphi_{n+j}|_\Gamma=0$, $q_2=0,1,\ldots,h_2-1$, $j=1,\ldots,n$; $f\in C^{(0,2h_3)}(\overline{D})$, $L^{q_3}f|_\Sigma=0$, $q_3=0,1,\ldots,h_3-1$, *де* $h_1=[5p/4]+2n+2$, $h_2=[5p/4+3/2]+2n$, $h_3=[5p/4+5/2]+n$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^1$*) чисел* T *існує розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^{2n}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,2n$, *і зображується формулами* (13)–(15).

Доведення. На підставі формул (13)–(15) та оцінок (6) маємо

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{D})}:=\sum_{0\leqslant b+|s|\leqslant 2n}\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial^{b+|s|}u(t,x)}{(\partial t^b\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p})}\right|\leqslant c_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{|e^{i\sqrt{\gamma_q\lambda_k}T}+e^{-i\sqrt{\gamma_q\lambda_k}T}|}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{j=1}^{n}c_3\lambda_k^{n+2-j}(|\varphi_{jk}|+|\varphi_{n+j,k}|\lambda_k^{-\frac{1}{2}})+c_4\lambda_k^{\frac{3}{2}}\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|\right)\right)\lambda_k^{\frac{p}{4}+n}. \tag{18}$$

Оскільки диференціальний вираз L є лінійним і самоспряженим, то за умов теореми на функції $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,2n$, використовуючи другу формулу Гріна [12, 13], отримуємо

$$\varphi_{jk}=\int\limits_\Omega\varphi_jX_kdx=(-1)^r\frac{1}{\lambda_k^r}\int\limits_\Omega L^r\varphi_jX_kdx,\qquad j=1,\ldots,2n,\qquad r\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

На підставі формули (19) та нерівності Коші–Буняковського [15] маємо

$$|\varphi_{jk}|=\frac{1}{\lambda_k^r}\sqrt{\int\limits_\Omega X_k^2dx}\sqrt{\int\limits_\Omega(L^r\varphi_j)^2dx}\leqslant c_5\lambda_k^{-r}\|\varphi_j\|_{C^{2r}(\overline{\Omega})},\quad j=1,\ldots,2n,\quad r\in\mathbb{N}. \tag{20}$$

Аналогічно для коефіцієнтів Фур'є функції $f(t,x)$ отримуємо

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|\leqslant c_6\lambda_k^{-r}\|f\|_{C^{(0,2r)}(\overline{D})},\qquad r\in\mathbb{N}. \tag{21}$$

На підставі оцінок (5), (17), (18), (20) та (21) дістаємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^1$) чисел T справджується нерівність

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{D})}\leqslant c_7\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\|\varphi_j\|_{C^{2h_1}(\overline{\Omega})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{g_1}}+\|\varphi_{n+j}\|_{C^{2h_2}(\overline{\Omega})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{g_2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\|f\|_{C^{(0,2h_3)}(\overline{D})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{g_3}}\right), \tag{22}$$

де $c_7 = c_2 \max\{c_3c_5, c_4c_6\}$, $g_1 = (2h_1 - 4n - 2)/p - 3/2 - \varepsilon$, $g_2 = (2h_2 - 4n - 1)/p - 3/2 - \varepsilon$, $g_3 = (2h_3 - 2n - 3)/p - 3/2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. За умов теореми $1 < g_i < 2$, $i = 1, 2, 3$. Тому ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^{g_i}$, $i = 1, 2, 3$, є збіжними. Позначимо їхні суми через s_1, s_2, s_3 відповідно. Тоді з (22) отримуємо

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{D})} \leqslant Sc_7\left(\sum_{j=1}^{n}(\|\varphi_j\|_{C^{2h_1}(\overline{\Omega})} + \|\varphi_{n+j}\|_{C^{2h_2}(\overline{\Omega})}) + \|f\|_{C^{(0,2h_3)}(\overline{D})}\right),$$

де $S = \max\{s_1, s_2, s_3\}$, звідки випливає доведення теореми.

У частинному випадку задачі (1)–(3), коли $p = 1$, $\Omega = (0, l)$, для єдиності класичного розв'язку необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь $kT\sqrt{\gamma_j}/l = 1/2 + m$, $j = 1, \ldots, n$, не мало розв'язків у цілих числах k та m ($k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$), а теорема існування формулюється аналогічно до теореми 2, де $h_1 = 2n + 5/2$, $h_2 = 2n + 2$, $h_3 = n + 5/2$.

Аналогічні результати отримано для нестрого гіперболічного рівняння вигляду (1), коли корені $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ ($q < n$) рівняння (10) мають кратності $m_1, \ldots, m_q$, відповідно ($m_1 + \cdots + m_q = n$). Тоді відповідний характеристичний визначник обчислюється за формулою

$$\Delta_1(\lambda_k) = \prod_{1 \leqslant r < d \leqslant q} (\beta_d^2 - \beta_r^2)^{2m_r m_d} \prod_{j=1}^{q}\left(\beta_j^{m_j^2}(e^{\beta_j T} + e^{-\beta_j T})^{m_j} \prod_{s=1}^{m_j} 2^{2s-2}(s-1)!^2\right), \qquad (23)$$

де $\beta_j = i\sqrt{\gamma_j \lambda_k}$, $j = 1, \ldots, q$.

Результати роботи можна поширити на випадок, коли рівняння (1) збурене нелінійним доданком $\varepsilon\Phi(t, x, u(t, x))$.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 29.1/005).

1. *Ben-Naoum A. K.* On the Dirichlet problem for the nonlinear wave equation in bounded domains with corner points // Bull. Belg. Math. Soc. – 1996. – No 3. – P. 345–361.
2. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**, No 12. – P. 851–858.
3. *Buryachenko E. A.* Solvability of the homogeneous Dirichlet problem in a disk for equations of order $2m$ in the case of multiple characteristics with inclination angles // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No 3. – P. 319–329.
4. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On the Dirichlet problem for four-order linear hyperbolic equations // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2002. – **49A**, No 2. – P. 197–219.
5. *Matthews J. V., Schaeffer D. G.* A Well-posed free boundary-value problem for a hyperbolic equation with Dirichlet boundary conditions // SIAM J. Math. Anal. – 2004. – **36**, Issue 1. – P. 256–271.
6. *Nowakowski A., Nowakowska I.* Dirichlet problem for semilinear hyperbolic equation // Nonlinear Anal. – 2005. – **63**, Issues 5–7. – P. e43-e52.
7. *Nguyen Manh Hung.* On the smoothness of a solution of the Dirichlet problem for hyperbolic systems in domains with a non-smooth boundary // Russian Math. Surveys. – 1998. – **53**, № 2. – P. 387–389.
8. *Березанский Ю. М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363–372.
9. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там само. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1281–1286.
10. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Там само. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.
11. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

12. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883–896.
13. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука, 1983. – 424 с.
14. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1981. – 544 с.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів
Національний університет “Львівська політехніка”

Надійшло до редакції 18.09.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **B. Yo. Ptashnyk, S. M. Repetylo**

A boundary-value problem with mixed conditions for a linear hyperbolic equation of high order with variable coefficients

The problem with mixed conditions for a linear inhomogeneous hyperbolic equation of the order $2n$ *with coefficients variable in the spatial coordinates is investigated. The conditions of correctness of the problem are established, and the solution in the form of a series by the system of orthogonal functions is constructed. For solving the problem of small denominators that appeares during the construction of the solution, the metric approach is used.*