УДК 517.944

Академік НАН України **А. М. Самойленко, С. Г. Хома-Могильська**

Аналітичний метод відшукання 2π-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку

Вперше в спеціально виділеному класі функцій побудовано оператор, який переводить клас 2π-періодичних функцій самого в себе.

Якщо досліджувати існування єдиного розв'язку крайових періодичних задач

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ &u(x,t+2\pi) = u(x,t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

у вигляді ряду [1–3]

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \qquad u_k(t+2\pi) = u_k(t), \tag{2}$$

то звідси випливає, що він належить класу обмежених функцій

$$Q^-_{2\pi\times 2\pi} = \{u\colon u(x,t) = -u(-x,t) = u(x+2\pi,t) = u(x,t+2\pi)\}. \tag{3}$$

З використанням введеного класу функцій (3) і класу $Q^-_{2\pi} = \{\mu\colon \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z+ + 2\pi)\}$ встановлено ряд тверджень, на основі яких будується оператор, що переводить клас періодичних функцій $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ у цей же клас функцій.

1. Розв'язок крайової задачі. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для кожної непарної і 2π-періодичної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbb{R})$, тобто $\mu \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap Q^-_{2\pi}$ і $f(x,t) \in \in Q^-_{2\pi\times 2\pi} \bigcap C^{1,0}(\mathbb{R}^2)$ лінійна крайова задача

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

має єдиний класичний розв'язок, який задається формулою

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi \equiv u^0(x,t) + \widetilde{u}_H(x,t), \tag{5}$$

де $u^0(x,t)$ — розв'язок відповідної однорідної крайової задачі ($f(x,t) \equiv 0$), а $\widetilde{u}_H(x,t)$ — частинний розв'язок лінійної неоднорідної крайової задачі (4).

2. Властивості оператора Даламбера. На основі вивчення властивостей внутрішнього інтеграла функції (оператора Даламбера)

$$\widetilde{u}_H(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi \tag{6}$$

можна досліджувати існування періодичних розв'язків крайових 2π-періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Введемо позначення

$$K(x,t,\tau)=\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{7}$$

Лема. *Якщо* $f(x,t)\in C(\mathbb{R}^2)\bigcap Q^-_{2\pi\times 2\pi}$, *то*

1) $K(x+2\pi,t,\tau)=K(x,t,\tau)$;

2) $K(x,t+2\pi,\tau)=K(x,t,\tau)$;

3) $K(x,t,\tau+2\pi)=K(x,t,\tau)$;

4) $K(-x,t,\tau)=-K(x,t,\tau)$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємося в справедливості твердження 1 леми. Далі на основі (7) одержуємо

$$K(x,t+2\pi,\tau)=\int\limits_{x-t+\tau-2\pi}^{x+t-\tau+2\pi} f(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{x-t+\tau-2\pi}^{x-t+\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_{x+t-\tau}^{x+t-\tau+2\pi} f(\xi,\tau)\,d\xi=\int\limits_{-2\pi}^{0} f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{0}^{2\pi} f(\xi,\tau)\,d\xi=$$
$$=0+\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi+0=K(x,t,\tau).$$

Отже, твердження 2 леми справедливе. Аналогічно доводимо твердження 3 і 4 леми.

3. Основна лема. На основі вищенаведеної леми можна довести таке твердження.

Основна лема. *Нехай* $f(x,t)\in C(\mathbb{R}^2)\bigcap Q^-_{2\pi\times 2\pi}$. *Тоді оператор, визначений формулою*

$$(Pf)(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\left(\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}ds\int\limits_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi,s)\,d\xi\right)d\tau\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\left(K(x,t,\tau)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}K(x,t,s)\,ds\right)d\tau, \tag{8}$$

при кожній функції $\mu(z)\in(\mathbb{R})\bigcap Q^-_{2\pi}$ *переводить функцію* f *з класу* $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ *у клас* $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$, *причому*

$$(Pf)(0,t)=0,\qquad (Pf)(\pi,t)=0,\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція (Pf) задовольняє крайові умови (9). На основі (8) при $x = 0$ одержуємо

$$(Pf)(0,t) = 0 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_{-(t-s)}^{t-s} f(\xi,s)\,d\xi \right) d\tau. \tag{10}$$

Оскільки при $f(x,t) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ інтеграл

$$\int\limits_{-(t-\tau)}^{t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \equiv 0, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

то на основі (10) і (11) маємо $(Pf)(0,t) = 0$, тобто функція Pf задовольняє першу крайову умову (9). Тепер, покладаючи $x = \pi$ у формулі (8), одержуємо

$$(Pf)(\pi,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_{\pi-t+s}^{\pi+t-s} f(\xi,s)\,d\xi \right) d\tau. \tag{12}$$

Доведемо, що при $f(x,t) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi} \bigcap C(\mathbb{R}^2)$ і $\mu(z) \in C(\mathbb{R}) \bigcap Q^-_{2\pi}$ інтеграли

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha \equiv 0; \qquad \int\limits_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \equiv 0, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Справді,

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha \equiv 0;$$

$$\int\limits_{\pi-t+\tau}^{\pi+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi = \int\limits_{-t+\tau}^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)\,d\eta = \int\limits_{-t+\tau}^{0} f(\pi+\eta,\tau)\,d\eta + \int\limits_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)\,d\eta =$$

$$= \int\limits_0^{t-\tau} f(\pi-y,\tau)\,dy + \int\limits_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)\,d\eta = -\int\limits_0^{t-\tau} f(\pi+y,\tau)\,dy + \int\limits_0^{t-\tau} f(\pi+\eta,\tau)\,d\eta \equiv 0.$$

Отже, на основі (12) і доведених рівностей маємо $(Pf)(\pi,t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Таким чином, виконується і друга крайова умова (9).

Нехай $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2) \bigcap Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ і $\mu(z) \in C(\mathbb{R}) \bigcap Q^-_{2\pi}$. Доведемо справедливість рівностей

$$(Pf)(x,t+2\pi) = (Pf)(x,t); \tag{13}$$

$$(Pf)(x+2\pi,t) = (Pf)(x,t); \tag{14}$$

$$(Pf)(-x,t) = -(Pf)(x,t). \tag{15}$$

Оскільки $(Pf)(x,t) \equiv u^0(x,t) + \widetilde{u}(x,t)$, то спочатку доведемо, що властивості (13)–(15) має розв'язок

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha$$

однорідної крайової періодичної задачі $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, $u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0$, $u^0(x,t+2\pi) = u^0(x,t)$.

Нехай $\mu(z) \in C(\mathbb{R}) \bigcap Q^-_{2\pi}$. Тоді

$$u^0(x,t+2\pi) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x+2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\eta+2\pi)\,d\eta = u^0(x,t);$$

$$u^0(x+2\pi,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x-2\pi}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x-2\pi}^{t-x} \mu(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t+x+2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= 0 + u^0(x,t) + 0 = u^0(x,t);$$

$$u^0(-x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t-x} \mu(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha = -u^0(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Тепер покажемо, що властивості (13)–(15) має й розв'язок

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\right)d\tau. \tag{16}$$

Справді,

$$\widetilde{u}(x,t+2\pi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t+2\pi} \left(K(x,t+2\pi,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t+2\pi,s)\,ds\right)d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \Bigg(K(x,t,\tau) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\Bigg)d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_t^{t+2\pi} \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\right)d\tau =$$

$$= \widetilde{u}(x,t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\right)d\tau =$$

$$= \widetilde{u}(x,t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(K(x,t,\tau) - \frac{2\pi}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\right)d\tau \equiv \widetilde{u}(x,t).$$

Покладаючи $x + 2\pi$ замість x, у формулі (16) одержуємо

$$\widetilde{u}(x+2\pi,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(K(x+2\pi,t,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x+2\pi,t,s)\,ds\right)d\tau = \widetilde{u}(x,t).$$

Аналогічно маємо

$$\widetilde{u}(-x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{-x-t+\tau}^{-x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_{-x-t+s}^{-x+t-s} f(\xi,s)\,d\xi\right)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(-\eta,\tau)\,d\eta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_{x+t-s}^{x-t+s} f(-\eta,s)\,d\eta\right)d\tau = -\widetilde{u}(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Використовуючи доведені властивості для функцій $u^0(x,t)$ і $\widetilde{u}(x,t)$ та зображення оператора $(Pf)(x,t) \equiv u^0(x,t)+\widetilde{u}(x,t)$, переконуємося в справедливості тверджень основної леми.

4. Застосування. Одержані результати дозволяють використати чисельно-аналітичний метод [4] для дослідження нелінійних крайових періодичних задач вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

за умови, що для кожної функції $u(x,t) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ функція $f(x,t,u(x,t)) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi}$.

1. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
2. *Rabinowitz P.* Periodic solution of hyperbolic partial differential equations // Communs. Pure and Appl. Math. – 1967. – **20**, No 1. – P. 145–205.
3. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Чисельно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 27.08.2009

Academician of the NAS of Ukraine **A. M. Samoilenko, S. H. Khoma-Mohylska**

An analytic method of determination of 2π-periodic solutions of the second-order hyperbolic equations

In a special function class, an operator which transfers the class of 2π-periodic functions into itself is constructed for the first time.