ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2010

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

Член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко, В. В. Семенов**

Алгоритми векторної оптимізації лінійних систем з узагальненим керуванням

Запропоновано ітераційні алгоритми для розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням та доведено збіжність алгоритмів із похибками в ітераційних підзадачах до множини керувань, що задовольняють необхідні умови ефективності.

Теорія задач векторної (багатокритеріальної) оптимізації є одним із тих розділів теорії екстремальних задач, який інтенсивно розвивається в останні десятиліття [1–4]. Дослідженню проблем векторної оптимізації та пошуку ефективних методів їх розв'язання присвячено надзвичайно багато літератури.

Мета роботи — повідомити результати останніх наших досліджень необхідних умов оптимальності та побудови збіжних алгоритмів для задач векторного оптимального керування лінійними розподіленими системами з узагальненими впливами.

Постановка задачі. Нехай W_1, W_2, H_1, H_2 і H — п'ять просторів Гільберта над полем $\mathbb{R}$. Позначимо відповідно через $\|\cdot\|_{W_1}$, $\|\cdot\|_{W_2}$, $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_{H_2}$, $\|\cdot\|_H$ норми в W_1, W_2, H_1, H_2 і H, а через $(\cdot,\cdot)_{W_1}$, $(\cdot,\cdot)_{W_2}$, $(\cdot,\cdot)_{H_1}$, $(\cdot,\cdot)_{H_2}$, $(\cdot,\cdot)_H$ — відповідні скалярні добутки. Нехай:

вкладення W_i в H_i, H_i в H неперервні та щільні;

простір H_i проміжний[1] між W_i і H, $i = 1, 2$.

Ототожнимо простір H зі спряженим до нього простором. Нехай W_1^-, W_2^-, H_1^- і H_2^- — простори, спряжені відповідно до W_1, W_2, H_1 і H_2. Тоді H можна ототожнити з деякими підпросторами в W_1^-, W_2^-, H_1^- і H_2^-. Приходимо до двох ланцюжків гільбертових оснащень $W_1 \subseteq H_1 \subseteq H \subseteq H_1^- \subseteq W_1^-$, $W_2 \subseteq H_2 \subseteq H \subseteq H_2^- \subseteq W_2^-$, причому кожен простір щільний в наступному і вкладення неперервні.

[1]Тобто комутативною є така діаграма (стрілочки суть оператори вкладень) [5, с. 21]:

$$\begin{array}{ccc} W_i & = & W_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i & \rightarrow & H \end{array}$$

Нехай функціонування системи описується відомим нам лінійним та неперервним оператором $\mathcal{L} \in L(W_1, W_2^-)$; задані: простір керувань — гільбертів простір V, ототожнений зі своїм спряженим, і відображення (нелінійне) $F\colon V \to W_2^-$.

Через $\mathcal{L}^+$ позначимо H-спряжений до $\mathcal{L}$ оператор, тобто $\mathcal{L}^+ \in L(W_2, W_1^-)$ і

$$\langle \mathcal{L}y, p\rangle_{W_2^-, W_2} = \langle y, \mathcal{L}^+ p\rangle_{W_1, W_1^-} \qquad \text{для} \qquad y \in W_1, \qquad p \in W_2.$$

Для кожного керування $u \in V$ стан $y = y(u)$ системи визначається як узагальнений розв'язок операторного рівняння

$$\mathcal{L}y = F(u), \tag{1}$$

тобто $y \in H_1$ — елемент, що задовольняє тотожність $\langle y, \mathcal{L}^+ p\rangle_{H_1, H_1^-} = \langle F(u), p\rangle_{W_2^-, W_2}$, $\forall\, p \in \in W_2\colon \mathcal{L}^+ p \in H_1^-$.

Припустимо, що виконуються апріорні оцінки

$$\|y\|_{H_1} \leqslant c\|\mathcal{L}y\|_{W_2^-}, \qquad \forall\, y \in W_1, \tag{2}$$

$$\|p\|_{H_2} \leqslant c\|\mathcal{L}^+ p\|_{W_1^-}, \qquad \forall\, p \in W_2. \tag{3}$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Якщо справджуються апріорні оцінки* (2), (3), *то для довільного* $f \in H_2^-$ *існує єдиний розв'язок* $y \in W_1$ *операторного рівняння*

$$\mathcal{L}y = f, \tag{4}$$

а для довільного $f \in W_2^-$ *існує єдиний узагальнений розв'язок* $y \in H_1$ *рівняння* (4). *При цьому лінійне відображення* $f \mapsto y$ *неперервне у відповідних топологіях.*

Зауваження 1. Аналогічний факт має місце і для спряженого рівняння $\mathcal{L}^+ p = g$. Доведення апріорних оцінок вигляду (2), (3) для багатьох класів диференціальних операторів наведені в роботах [5, 6].

Згідно з теоремою 1 рівняння (1)б однозначно визначає стан системи $y(u)$.

Нехай кожному керуванню $u \in V$ відповідає значення векторного критерію якості $J(u) = \Phi(y(u), u)$, де $\Phi\colon H_1 \times V \to \mathbb{R}^m$.

Припустимо, що в просторі $\mathbb{R}^m$ задано гострий замкнений опуклий конус K з непорожньою внутрішністю, тобто множина, що задовольняє такі умови:

$$-K \bigcap K = \{0\}, \qquad \lambda K \subseteq K \qquad (\lambda \geqslant 0), \qquad K + K \subseteq K, \qquad \operatorname{cl} K = K, \qquad \operatorname{int} K \neq \varnothing.$$

Позначимо $K^* = \{k^* \in \mathbb{R}^m\colon (k^*, k)_{\mathbb{R}^m} \geqslant 0\ \forall \in K\}$ — невід'ємний спряжений до K конус, причому $\operatorname{int} K^* \neq \varnothing$ завдяки гостроті конуса [7, с. 132].

Нехай у просторі V задано множину допустимих керувань $U \subseteq V$.

Задача полягає у пошуку допустимих керувань $u \in U$ таких, що

$$J(v) \notin J(u) - (K \setminus \{0\}), \qquad \forall\, v \in U. \tag{5}$$

Допустимі керування, що задовольняють (5), називаємо ефективними, або оптимальними за Парето [4], а множину таких керувань позначимо $E_K(U)$. Якщо у формулі (5) замість множини U поставити перетин $U \bigcap O(u)$, де $O(u)$ — деякий окіл точки u, то допустиме керування u будемо називати локально ефективним, а множину таких керувань позначимо $\operatorname{loc} E_K(U)$.

Задачу знаходження елементів $E_K(U)$ позначатимемо таким чином:

$$J(u) \to K - \min, \tag{6}$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \qquad u \in U. \tag{7}$$

Теореми існування ефективних розв'язків задачі (6), (7) див. в [8].

Теореми гладкості та умови ефективності. Розглянемо систему, що описується рівнянням (7). Мають місце такі теореми.

Теорема 2. *Нехай:*

1) оператор $F\colon V \to W_2^-$ має в точці $u \in V$ похідну Фреше $F'(u) \in L(V, W_2^-)$;

2) оператор $\Phi = (\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(m)})\colon H_1 \times V \to \mathbb{R}^m$ має в точці $(y(u), u) \in H_1 \times V$ похідну Фреше, і відповідні частинні похідні мають вигляд

$$\Phi_1'(y(u), u) = (D_1\Phi^{(1)}(y(u), u), \ldots, D_1\Phi^{(m)}(y(u), u)) \in (H_1^-)^m,$$

$$\Phi_2'(y(u), u) = (D_2\Phi^{(1)}(y(u), u), \ldots, D_2\Phi^{(m)}(y(u), u)) \in V^m.$$

Тоді відображення $J = (J^{(1)}, \ldots, J^{(m)})\colon V \to \mathbb{R}^m$ диференційовне за Фреше в $u \in V$, і його похідна обчислюється за формулою

$$J'(u)(h) = \begin{pmatrix} (DJ^{(1)}(u), h)_V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (DJ^{(m)}(u), h)_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((F'(u))^* p_1 + D_2\Phi^{(1)}(y(u), u), h)_V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ((F'(u))^* p_m + D_2\Phi^{(m)}(y(u), u), h)_V \end{pmatrix}, \qquad \forall h \in V,$$

де $p_i \in W_2$ — розв'язок операторного рівняння $\mathcal{L}^+ p_i = D_1\Phi^{(i)}(y(u)u)$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 3. *Нехай на обмеженій опуклій множині $U \subseteq V$ оператор $u \mapsto F'(u)$ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$; оператори $(y, u) \mapsto \Phi_1'(y, u)$ і $(y, u) \mapsto \Phi_2'(y, u)$ задовольняють на обмежених підмножинах простору $H_1 \times V$ умову Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$. Тоді похідна Фреше $J'(\cdot)$ задовольняє на множині U умову Гельдера з показником γ.*

Далі будемо вважати, що множина допустимих керувань $U \subseteq V$ опукла, компактна і на ній виконуються умови теорем 2, 3.

Має місце

Теорема 4. *Нехай U — опукла підмножина V і $u \in \operatorname{loc} E_K(U)$. Тоді*

$$\forall v \in U\colon \begin{pmatrix} ((F'(u))^* p_1 + D_2\Phi^{(1)}(y, u), v - u)_V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ((F'(u))^* p_m + D_2\Phi^{(m)}(y, u), v - h)_V \end{pmatrix} \notin -\operatorname{int} K, \tag{8}$$

де $p_i \in W_2\colon \mathcal{L}^+ p_i = D_1\Phi^{(i)}(y, u)$, $i = \overline{1, m}$.

Скаляризуємо необхідну умову ефективності (8). Отриману скалярну умову використаємо для побудови алгоритмів розв'язання задачі керування (6), (7).

Розглянемо компакт $B \subseteq \mathbb{R}^m$ такий, що не містить нуль і $K^* = \operatorname{con}(\operatorname{conv} B)$. Якщо $K = K^* = \mathbb{R}^m_+$, то можна покласти $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, де $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,

…, $e_m = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. В загальному випадку покладемо, наприклад, $B = K^* \bigcap \{k \in \mathbb{R}^m \colon \|k\|_{\mathbb{R}^m} = 1\}$. Конуси K та $\operatorname{int} K$ можна подати так:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m \colon (x, x')_{\mathbb{R}^m} \geqslant 0 \ \forall\, x' \in B\}, \qquad \operatorname{int} K = \{x \in \mathbb{R}^m \colon (x, x')_{\mathbb{R}^m} > 0 \ \forall\, x' \in B\}.$$

Розглянемо опорну функцію множини B:

$$\sigma_B(x) = \max_{x' \in B} (x, x')_{\mathbb{R}^m}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m. \tag{9}$$

З (9) випливає додатна однорідність, напівадитивність та ліпшицевість функції σ_B. З компактності та породжуючої властивості множини B випливають потрібні нам представлення: $-K = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \sigma_B(x) \leqslant 0\}$, $-\operatorname{int} K = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \sigma_B(x) < 0\}$.

Ці представлення конусів $-K$ та $-\operatorname{int} K$ дозволяють переформулювати теорему 4 у такий спосіб.

Теорема 5. *Нехай U — опукла підмножина V і $u \in \operatorname{loc} E_K(U)$. Тоді*

$$\forall\, v \in U \colon \sigma_B \begin{pmatrix} ((F'(u))^* p_1 + D_2\Phi^{(1)}(y, u), v - u)_V \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ((F'(u))^* p_m + D_2\Phi^{(m)}(y, u), v - u)_V \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{10}$$

де $p_i \in W_2 \colon \mathcal{L}^+ p_i = D_1\Phi^{(i)}(y, u)$, $i = \overline{1, m}$.

Зауваження 2. Якщо $x - y \in K$ ($x - y \in \operatorname{int} K$), то $\sigma_B(x) \geqslant \sigma_B(y)$ ($\sigma_B(x) > \sigma_B(y)$). Дійсно, маємо $\sigma_B(y - x) \leqslant 0$ ($\sigma_B(y - x) < 0$). Але $\sigma_B(x) + \sigma_B(y - x) \geqslant \sigma_B(y)$, звідки випливає бажане.

Зауваження 3. Розглянемо деяку множину X і відображення $X \xrightarrow{J} \mathbb{R}^m$. Задачу пошуку точок $\overline{x} \in X$ таких, що $J(X) \bigcap (J(\overline{x}) - \operatorname{int} K) = \varnothing$, можна переформулювати у вигляді:

$$\text{знайти} \qquad \overline{x} \in X \colon \quad g(\overline{x}, x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in X, \tag{11}$$

де $g(x_1, x_2) = \sigma_B(J(x_2) - J(x_1))$. Задача (11) суть загальна задача рівноважного програмування. Отже, популярна зараз "рівноважна" алгоритміка [9] може бути використана для побудови методів розв'язання задачі (6), (7). Відзначимо, що формулювання, подібне до (11), було використано в [10] для отримання умов оптимальності другого порядку в абстрактних задачах векторної оптимізації.

Аналог методу лінеаризації. Нехай $f \colon X \to \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Записом

$$f(x) \to \varepsilon - \inf_{x \in X}$$

будемо позначати задачу пошуку точок $x' \in X$ таких, що $f(x') \leqslant \inf\limits_{x \in X} f(x) + \varepsilon$.

Застосувавши до (10) евристичні міркування, що у скалярному випадку привели до методу лінеаризації, і зробивши припущення про неточний характер обчислень, отримуємо таку ітераційну процедуру.

Алгоритм 1.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$, $n := 0$.

2. Знаходимо $\widetilde{y}_n \in H \colon \|\widetilde{y}_n - y_n\|_{H_1} \leqslant \delta'_n$, де $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L} y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо $\vec{\widetilde{p}}_n = (\widetilde{p}_n^1, \widetilde{p}_n^2, \ldots, \widetilde{p}_n^m) \in (W_+)^m \colon \|\widetilde{p}_n^k - \widehat{p}_n^k\|_{W_+} \leqslant \delta''_n$, $k = \overline{1, m}$, де $\widehat{p}_n^k \in W_+$ — розв'язки рівнянь $\mathcal{L}^+ \widehat{p}_n^k = D_1\Phi^{(k)}(\widetilde{y}_n, u_n)$ $k = \overline{1, m}$.

4. Знаходимо $\overline{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі:

$$\sigma_B \circ ((F'(u_n))^* \vec{\widetilde{p}}_n + \Phi_2'(\widetilde{y}_n, u_n))(u - u_n) \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\overline{u}_n - u_n)$, $(\rho_n \in (0,1])$, $n := n+1$, переходимо на крок 2.

Зауваження 4. Ідея побудови алгоритмів типу розглянутого була вперше висунута в роботі [11]. В цитованій статті розглядалася задача

$$f(x) \to \mathbb{R}^m_+ - \min, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

де $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — диференційовне відображення з похідною f', що задовольняє умову Ліпшица. Для розв'язання (12) автори запропонували метод вигляду

$$x_{n+1} = x_n + \rho_n(\overline{x}_n - x_n), \tag{13}$$

$$\overline{x}_n = \arg\min\left\{ \max_{k \in \{1,\ldots,m\}} (\operatorname{grad} f_k(x_n), x - x_n) + \frac{1}{2}\|x - x_n\|^2_{\mathbb{R}^n} \right\}, \tag{14}$$

де величина кроку ρ_n обирається за правилом Арміхо [12]. В алгоритмі з [11] множина B має вигляд $\{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)\}$.

Позначимо через U^* множину керувань, що задовольняють необхідну умову ефективності (10). Має місце наступна теорема про збіжність алгоритму 1.

Теорема 6. *Нехай $\rho_n \in (0,1]$, $\rho_n \to 0$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \rho_n = +\infty$, $\varepsilon_n \to +0$, $\delta_n' \to +0$, $\delta_n'' \to +0$; функціонал $\sigma_B \circ J$ набуває на множині U^* не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки послідовності (u_n) утворюють компактну зв'язну підмножину в U^*, а числова послідовність $(\sigma_B(J(u_n)))$ має границю.*

Метод з довірчою областю. Зафіксуємо дві числові послідовності (α_n) і (β_n) такі, що $0 < \alpha_n \leqslant \beta_n$ $(n \in \mathbb{N})$, та послідовність замкнених опуклих множин $M_n \subseteq V$ простої структури таку, що $\{v \in V\colon \|v\|_V \leqslant \alpha_n\} \subseteq M_n \subseteq \{v \in V : \|v\|_V \leqslant \beta_n\}$.

Для розв'язання задачі (6), (7) пропонуємо такий метод.

Алгоритм 2.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$, $n := 0$.

2. Знаходимо $y_n \in H$ — узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо спряжені стани $\vec{p}_n = (p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^m) \in (W_+)^m$: $\mathcal{L}^+ p_n^k = D_1\Phi^{(k)}(y_n, u_n)$ $k = \overline{1,m}$.

4. Знаходимо $\overline{u}_n \in U$ — розв'язок екстремальної задачі:

$$\sigma_B \circ ((F'(u_n))^* \vec{p}_n + \Phi_2'(y_n, u_n))(u - u_n) \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U \cap (u_n + M_n)}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = \overline{u}_n$, $n := n+1$, переходимо на крок 2.

Зауваження 5. Алгоритм 2 можна віднести до родини так званих методів з довірчою областю (Trust-Region Method) [12].

Відносно послідовності (u_n), що породжена алгоритмом 2, справджується наступний факт.

Теорема 7. *Нехай $\varepsilon_n > 0$, $k\alpha_n \geqslant \beta_n \geqslant \alpha_n > 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\dfrac{\beta_n^{1+\gamma}}{\alpha_n} \to 0$, $\dfrac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$; множина $(\sigma_B \circ J)(U^*)$ ніде не щільна. Тоді всі граничні точки послідовності (u_n) утворюють компактну зв'язну підмножину в U^*, а послідовність $((\sigma_B \circ J)(u_n))$ має границю.*

Аналог послідовно-квадратичного методу. Розглянемо ще один ітераційний алгоритм розв'язання задачі (6), (7).

Алгоритм 3.

1. Обираємо початкове наближення $u_0 \in U$, $n := 0$.

2. Знаходимо $y_n \in H$ *— узагальнений розв'язок рівняння* $\mathcal{L}y_n = F(u_n)$.

3. Знаходимо спряжені стани $\vec{p}_n = (p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^m) \in (W_+)^m$: $\mathcal{L}^+ p_n^k = D_1\Phi^{(k)}(y_n, u_n)$ $k = \overline{1,m}$.

4. Знаходимо $\overline{u}_n \in U$ *— розв'язок екстремальної задачі:*

$$\sigma_B \circ ((F'(u_n))^* \vec{p}_n + \Phi_2'(y_n, u_n))(u - u_n) + \frac{1}{2\alpha_n}\|u - u_n\|_V^2 \to \varepsilon_n - \inf_{u \in U}.$$

5. Покладаємо $u_{n+1} = u_n + \rho_n(\overline{u}_n - u_n)$, $(\rho_n \in (0,1])$, $n := n+1$, *переходимо на крок 2.*

Має місце теорема.

Теорема 8. *Нехай* $\rho_n \in [\underline{\rho}, \overline{\rho}] \subseteq (0,1)$, $\alpha_n \to 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\varepsilon_n > 0$, $\dfrac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \to 0$. *Якщо функціонал* $\sigma_B \circ J$ *набуває на множині* U^* *не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки послідовності* (u_n), *що породжена алгоритмом 3, утворюють компактну зв'язну підмножину в* U^*, *а послідовність чисел* $\sigma_B(J(u_n))$ *має границю.*

Заключні зауваження. Відзначимо, що запропоновані методи мають один недолік: на кожному ітераційному кроці слід розв'язувати негладку задачу кусково-лінійної або кусково-квадратичної оптимізації.

У розглянутих методах не використовується операція лінійного згортування векторного критерію. Тобто ми не робимо жодних апріорних припущень про відносну важливість частинних критеріїв.

Зрозуміло, що, використовуючи опорну функцію σ_B, можна побудувати "багатокритеріальний" варіант методу Ньютона. А саме, слід будувати послідовність керувань

$$u_{n+1} = u_n + \rho_n(\overline{u}_n - u_n),$$
$$\overline{u}_n \in \arg\min\left\{\sigma_B\left(J'(u_n)(u - u_n) + \frac{1}{2}J''(u_n)(u - u_n, u - u_n)\right)\right\},$$

де величина кроку $\rho_n \in [0,1]$ обирається за одним з відомих правил.

1. *Dauer J. P., Stadler W.* A Survey of vector optimization in infinite-dimensional spaces, Part 2 // J. of Optimization Theory and Applications. – 1986. – **51**, No 2. – P. 205–241.
2. *Гороховик В. В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. – Минск: Навука i тэхнiка, 1990. – 238 с.
3. *Gopfert A., Tammer Chr., Riahi H., Zalinesku C.* Variational methods in partially ordered spaces. – New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. – 350 p.
4. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач: 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 256 с.
5. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. – Москва: ООО "И. Д. Вильямс", 2009. – 192 с.
6. *Lyashko S. I.*, Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. – Boston; Dordrecht; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 466 p.
7. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. – Киев: Вища шк., 1978. – 192 с.
8. *Семенов В. В.* Задача векторной оптимизации линейных распределенных систем с сингулярным управлением // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 74–80.

9. *Антипин А. С.* Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. – Москва: ВЦ РАН, 2002. – 130 с.
10. *Gorokhovik V. V.* Second order optimality conditions for vector optimization problems with geometric constraints. – Диф. уравнения и топология: Междунар. конф., посв. 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: Тез. докл. – Москва: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. – С. 250–251.
11. *Fliege J., Svatier B. F.* Steepest descent methods for multicriteria optimization // Math. Methods of Operations Research. – 2000. – **51**, iss. 3. – P. 479–494.
12. *Измаилов А. Ф., Солодов М. В.* Численные методы оптимизации. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.09.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **S. I. Lyashko, V. V. Semenov**

Algorithms for vector optimization of linear systems with a generalized control

Iterative algorithms for solving the problems of vector optimization of linear distributed systems with a generalized control are offered. Convergence of algorithms with errors in iterative subproblems to the set of controls which satisfy the necessary conditions of efficiency is proved.