



УДК 539.3

© 2010

Академік НАН України В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук,
М. П. Подчасов

Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною

Розглядається задача про стійкість тонких циліндричних оболонок при взаємодії з протікаючою рідиною. Досліджуються дві різні форми втрати стійкості: квазістатична (дивергентна) та динамічна (типу флатер). Вивчається вплив демпфірування на значення критичних швидкостей дивергенції та флатеру.

Проблемам динамічної взаємодії тонких циліндричних оболонок із внутрішнім потоком рідини присвячені роботи [1–4 та ін.]. Головну увагу в них було зосереджено на визначенні критичних значень швидкостей руху рідини, при яких має місце квазістатична (дивергентна) або динамічна (типу флатер) втрата стійкості вказаних оболонок, а також на дослідженні впливу граничних умов, нелінійних та інших факторів (зокрема ефекту стисливості рідини) на нестійкість та динамічне деформування оболонок в закритичних областях. При розрахунках в більшості випадків використовувалась апроксимація прогину за формами з фіксованими параметрами хвилеутворення.

У даній роботі розглядається задача про втрату стійкості циліндричних оболонок, зумовленої взаємодією із рухомою рідиною, при врахуванні в процесі деформування оболонок згинних форм з будь-якими параметрами хвилеутворення в поздовжньому і в коловому напрямках. Досліджується вплив демпфірування на динамічну нестійкість несучих оболонок.

1. Розглядається замкнена, пружна, ізотропна оболонка циліндричної форми, повністю заповнена рідиною, що рухається з деякою постійною швидкістю U . Відповідні геометричні розміри оболонки показані на рис. 1. Вважається, що рідина в оболонці є ідеальною та нестисливою, рух рідини — потенціальний.

Для опису динамічного деформування оболонки виберемо лінеаризовані рівняння класичної теорії, подані в змішаній формі [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{P_r}{h}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

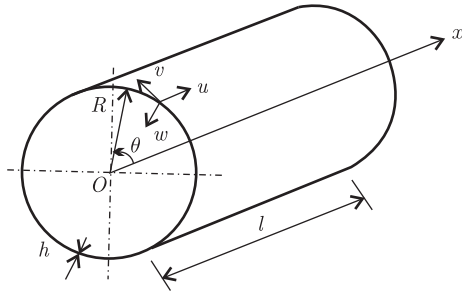


Рис. 1. Геометрія оболонки та координатна система

Тут використано традиційні в теорії оболонок позначення [5], крім того, ε_0 — коефіцієнт конструкційного демпфірування; P_Γ — гідродинамічний тиск, який визначатимемо із відомого співвідношення [1, 2, 4]

$$P_\Gamma = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{r=R}, \quad (2)$$

де ρ_0 — густина рідини; $\varphi = \varphi(x, r, \theta, t)$ — потенціал збурених швидкостей рідини (x, r, θ — циліндричні координати).

За умов вільного обпирання на торцевих перерізах оболонки (при $x = 0, x = l$) [5] динамічний прогин w можна навести у вигляді двопараметричного розкладу

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_1^{nm} \cos s_n y + f_2^{nm} \sin s_n y) \sin \lambda_m x, \quad (3)$$

де $f_{1,2}^{nm}$ — невідомі функції часу (що мають сенс узагальнених координат); $s_n = n/R$, $\lambda_m = m\pi/l$ — параметри хвилеутворення в коловому та поздовжньому напрямках відповідно.

Крайову задачу для знаходження потенціалу φ сформулюємо так [2, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= 0 \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq x \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} &= - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=0} < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Використовуючи метод Бубнова–Гальоркіна для визначення невідомих функцій $f_{1,2}^{nm}$, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1^{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_1^{nm} + \varepsilon^{nm} \dot{f}_1^{nm} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_m^{nq} U \dot{f}_1^{nq} &= 0; \\ \ddot{f}_2^{nm} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_2^{nm} + \varepsilon^{nm} \dot{f}_2^{nm} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_m^{nq} U \dot{f}_2^{nq} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots),$

в якій позначено

$$\begin{aligned}\omega_{nm}^2 &= \frac{1}{\rho M_{nm}} \left[\frac{D}{h} \Delta(\lambda_m, s_n) + \frac{E \lambda_m^4}{R^2 \Delta(\lambda_m, s_n)} \right]; & M_{nm} &= 1 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{K_{nm}}{h \lambda_m}; \\ \alpha_{nm} &= \frac{\rho_0}{\rho h} \frac{\lambda_m}{M_{nm}} K_{nm}; & \varepsilon^{nm} &= \frac{\varepsilon_0}{M_{nm}}; & \beta_m^{nq} &= \frac{4 \rho_0 \lambda_m [1 - (-1)^{m-q}]}{\rho h l (\lambda_m^2 - \lambda_q^2) M_{nm}} K_{nq}; \\ K_{nm} &= \frac{2 I_n(\lambda_m R)}{I_{n-1}(\lambda_m R) + I_{n+1}(\lambda_m R)}; & \Delta(\lambda_m, s_n) &= (\lambda_m^2 + s_n^2)^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Для знаходження критичних швидкостей руху рідини, при яких відбуватиметься втрата стійкості оболонки, підставимо в рівняння (5) вирази

$$f_k^{nm} = C_k^{nm} e^{\Omega t}, \quad C_k^{nm} = \text{const} \quad (k = 1, 2) \quad (7)$$

і розглянемо визначник

$$\|(\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2 + \Omega^2 + \varepsilon_{nm} \Omega) \delta_{mq} + \beta_m^{nq} U \Omega\| = 0 \quad (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Незбурена форма несучої оболонки залишатиметься стійкою, поки всі показники Ω знаходяться в лівій півплощині комплексної змінної [1]. Найменше значення швидкості U , при якому один із показників Ω переходить на праву півплощину, залишаючись при цьому комплексним, відповідатиме критичній швидкості флатеру $U = U_\Phi$. Якщо перехід показника Ω на праву півплощину відбуватиметься через початок координат (тобто, в момент переходу $\Omega = 0$), то втрата стійкості оболонки характеризуватиметься дивергентною формою (монотонним випинанням). Критичну швидкість в даному випадку позначимо через $U = U_\Phi^{(1)}$.

2. Для з'ясування принципової сторони питання про втрату стійкості несучої оболонки розглянемо чотиримодову апроксимацію прогину, в якому враховані спряжені форми [6, 7], а також форми з різними параметрами хвилеутворення

$$w = (f_1 \cos s_n y + f_2 \sin s_n y) \sin \lambda_1 x + (f_3 \cos s_n y + f_4 \sin s_n y) \sin \lambda_2 x. \quad (9)$$

Тут $s_n = n/R$, $\lambda_1 = m_1 \pi/l$, $\lambda_2 = m_2 \pi/l$, причому хвильові параметри n , m_1 , m_2 можуть набувати будь-яких цілочисельних значень ($m_1 \neq m_2$). Характеристичне рівняння (8) матиме тоді вигляд

$$\Omega^4 + c_1 \Omega^3 + c_2 \Omega^2 + c_3 \Omega + c_4 = 0, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}c_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2; & c_2 &= q - \alpha_0 U^2; \\ c_3 &= \varepsilon_1 (\omega_2^2 - \alpha_2 U^2) + \varepsilon_2 (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2); & c_4 &= (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2) (\omega_2^2 - \alpha_2 U^2); \\ \alpha_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 \beta_2; & q &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2,\end{aligned}\quad (11)$$

з урахуванням заміन $\omega_i = \omega_{nm_i}$, $\alpha_i = \alpha_{nm_i}$, $\beta_1 = \beta_{m_1}^{nm_2}$, $\beta_2 = \beta_{m_2}^{nm_1}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_0 / M_{nm_i}$ ($i = 1, 2$).

Нехай $\varepsilon_0 = 0$. Тоді із рівняння (10) отримаємо такі розв'язки:

$$\Omega_{1,2}^2 = -\frac{c_2}{2} \pm \sqrt{\frac{c_2^2}{4} - c_4}. \quad (12)$$

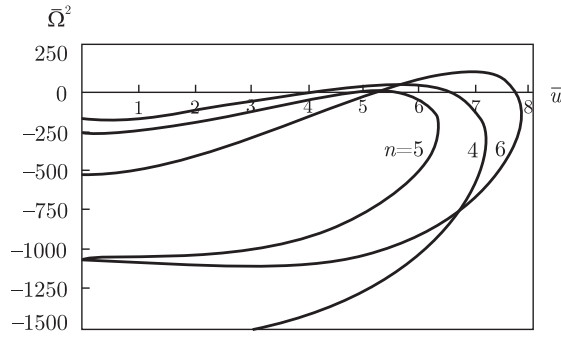


Рис. 2. Залежність квадрата характеристичного показника $\bar{\Omega}$ від швидкості руху рідини \bar{U} при різних значеннях хвильового параметра n

Звідси випливає, що для стійкості оболонки необхідно виконання двох умов:

$$c_4 > 0, \quad c_2 > 2\sqrt{c_4}. \quad (13)$$

Невиконання першої з них зумовлює нестійкість дивергентного типу, другої — типу флатер. Критичні швидкості руху рідини, при яких настане динамічна нестійкість, визначатимуться в свою чергу із співвідношення

$$U_{\Phi}^2 = U_{1,2}^2 = -\frac{d_2}{2d_1} \pm \sqrt{\frac{d_2^2}{4d_1^2} - \frac{d_3}{d_1}}, \quad (14)$$

де

$$d_1 = \alpha_0^2 - 4\alpha_1\alpha_2; \quad d_2 = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2)\alpha_0 + 4(\omega_1^2\alpha_2 + \omega_2^2\alpha_1); \quad d_3 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2. \quad (15)$$

Частота автоколивань оболонки p виражатиметься відповідно так:

$$p = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \alpha_0 U_{\Phi}^2}{2}}. \quad (16)$$

На рис. 2 наведено графіки залежності безрозмірних величин $\bar{\Omega}^2$ від швидкостей руху рідини \bar{U} , побудовані для оболонки з параметрами $E = 0,67 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 2,7\rho_0$; $\rho_0 = 10^3$ кг/м³; $l/R = 5$; $h = 6,4 \cdot 10^{-4}$ м; $R = 0,16$ м; $\mu = 0,32$ з використанням формули (12) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ та різних значеннях колового параметра n : $n = 4, 5, 6$. При отриманні результатів було прийнято [4] $\bar{U} = U/k_0$, $\bar{\Omega} = \Omega/k_0$, де $k_0 = \pi^2/l\sqrt{D/(\rho h)}$ (D — циліндрична жорсткість оболонки).

З цих графіків видно, що дивергентна втрата стійкості оболонки передусім наступить при збудженні в ній колової форми з числом хвиль $n = 4$. Швидкість руху рідини при цьому $\bar{U}_d^{(1)} = 4,32$. Нестійкість типу флатер, яка буде реалізована при появі кратних коренів рівняння (10), матиме місце при збудженні іншої колової форми, а саме $n = 5$. У табл. 1 наведені числові значення знайдених із співвідношення (14) безрозмірних швидкостей \bar{U}_{Φ} , що відповідають різним комбінаціям колових (n) та осьових (m_1, m_2) хвильових параметрів. Жирним позначені величини мінімальних швидкостей \bar{U}_{Φ} , при яких виникнуть неосесиметричні коливання оболонки з прогресуючими амплітудами для кожної із серій параметрів m_1, m_2 . Відзначимо, що ці швидкості відповідають взаємодії сусідніх

осьових форм, тобто форм з параметрами m_1 та $m_2 = m_1 + 1$. Врахування в апроксимації (9) форм з будь-якими іншими комбінаціями параметрів m_1 , m_2 призведе до виникнення флатеру при більших значеннях швидкостей U . Зауважимо також, що відсутність у деяких випадках додатних розв'язків U означає, що рівняння (10) не має кратних коренів, внаслідок чого втрата стійкості оболонки за типом флатер в даній ситуації взагалі неможлива.

Величини безрозмірних частот \bar{p} ($\bar{p} = pl/k_0$) флатерних коливань оболонки, отримані на підставі формули (16), наведені в табл. 2.

Були проведені також дослідження швидкостей U_Φ та частот p флатеру при інших значеннях параметрів m_1 , m_2 , n . На основі отриманих результатів зроблено такі висновки. Залежно від того, які згинні форми оболонки збуджуються при динамічній втраті стійкості, коливання, які при цьому виникають, можуть характеризуватись як близькими, так і кратними частотами. Наприклад, близькими можна вважати виділені в табл. 2 частоти коливань $\bar{p}_1 = 14,44$ і $\bar{p}_2 = 14,82$, що реалізуються за комбінованими формами $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $n = 5$ і $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $n = 6$. Швидкість руху рідини при цьому $\bar{U} \approx 6$. Фізично це означає, що динамічна втрата стійкості оболонки при даній швидкості може відбуватись шляхом одночасного збудження в ній згинних форм з різними коловими параметрами n . Відзначимо, що ця особливість (наявність внутрішніх резонансів [6–8]) повинна обов'язково враховуватися при побудові нелінійних розрахункових моделей оболонок, що взаємодіють з протікаючою рідиною.

Таблиця 1

m_1	m_2	n							
		2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	16,12	10,08	7,17	6,34	7,82	11,06	15,36	20,60
	3	36,85	25,70	18,32	13,18	—	—	—	—
	4	23,82	18,21	13,85	10,66	—	—	—	—
2	3	17,55	12,11	8,80	6,16	6,00	6,40	8,23	10,97
	4	38,54	30,86	23,76	18,41	14,31	10,56	—	—
	5	23,79	20,20	16,36	13,22	10,75	8,64	—	—
3	4	18,29	13,73	10,48	8,28	6,89	6,23	6,47	7,79
	5	35,56	32,32	26,87	21,90	17,85	14,50	11,34	—
	6	21,79	20,53	17,73	14,95	12,58	10,60	8,84	—

Таблиця 2

m_1	m_2	n							
		2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	42,01	25,99	18,31	15,04	11,92	2,70	15,47	24,74
	3	183,45	127,86	90,06	61,68	—	—	—	—
	4	114,89	89,20	67,04	48,14	—	—	—	—
2	3	43,18	25,84	17,36	14,44	14,82	12,30	17,06	34,29
	4	305,41	248,95	191,70	147,15	111,05	72,75	—	—
	5	167,10	154,42	127,36	102,17	79,36	52,83	—	—
3	4	46,35	23,66	3,42	7,92	5,97	13,83	13,77	20,21
	5	369,80	350,84	294,44	239,67	193,35	152,60	108,81	—
	6	171,29	199,78	181,48	155,10	129,19	103,85	73,45	—

3. Якщо $\varepsilon_0 \neq 0$, то стійкість несучої оболонки була досліджена на основі критеріїв Рауса–Гурвіца, які в даному випадку матимуть вигляд [9]

$$c_2 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_4 > 0, \quad c_1 c_2 c_3 - c_3^2 - c_4 c_1^2 > 0. \quad (17)$$

Аналізуючи ці критерії, встановлюємо, що демпфірування не змінюватиме величини критичної швидкості руху рідини $U_d^{(1)}$, при якій настане дивергенція (нагадаємо, що $U_d^{(1)} = \omega_1/\sqrt{\alpha_1}$). Що стосується втрати стійкості оболонки типу флатер, то вона відбудеться при деякій швидкості $U = U_\phi^{(1)}$, яка при відносно малих значеннях параметра демпфірування ε_0 на незначну величину перевищуватиме швидкість $U_d^{(2)} = \omega_2/\sqrt{\alpha_2}$. При цьому в вузькій зоні $U_d^{(2)} < U < U_\phi^{(1)}$ оболонка також знаходитиметься в зоні нестійкості дивергентного типу, оскільки в цій зоні $\text{Im } \Omega = 0$.

Таким чином, при наявності демпфірування в рівняннях (1) квазістатична нестійкість оболонки плавно перейде в динамічну нестійкість. У формуванні флатерної нестійкості на початковому етапі братиме участь лише одна осьова форма $m = 1$. Інша форма $m = 2$ продовжує деякий час бути стійкою. При більш високій швидкості U , коли уявні частини коренів Ω рівняння (10) стають максимально наближеними одна до іншої, наступить так званий “класичний” флатер [1, 5], що реалізується за одночасною участю в динамічному процесі обох згаданих форм. Він характеризується більш істотним (“бурхливим”) зростанням в часі амплітуд коливань оболонки порівняно з “одномодовим” флатером.

Таким чином, демпфірування є в даному випадку “дестабілізуючим” фактором, зумовленим неконсервативністю системи [1]. При його врахуванні в розрахунковій моделі флатер може наступити при менших швидкостях руху рідини, ніж при $\varepsilon_0 = 0$.

Робота виконана при частковій фінансовій підтримці ДФФД Міністерства освіти та науки України (проект Ф28/257-2009).

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 339 с.
2. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – Москва: Наука, 1979. – 416 с.
3. Горачек Я., Золотарев И. А. Собственные колебания и устойчивость цилиндрических оболочек при взаимодействии с протекающей жидкостью // Динамика тел, взаимодействующих со средой / Под ред. академика АН УССР А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1991. – С. 215–272.
4. Amabili M., Pellicano F., Paidoussis M. P. Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part I: Stability // J. of Sound and Vibration. – 1999. – **225**, No 4. – P. 655–699.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
6. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – Киев: Наук. думка, 1984. – 220 с.
7. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Вища шк., 1989. – 208 с.
8. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S., Kruk L. A. On free non-linear vibrations of fluid-filled cylindrical shells with multiple natural frequencies // Прикл. механика. – 2005. – **41**, No 10. – С. 127–138.
9. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko, P. S. Koval'chuk,**
M. P. Podchasov

Analysis of stability of cylindrical shells interacting with a flowing fluid

The problem of the stability of thin cylindrical shells interacting with a flowing fluid is considered. Two different types of instability, quasistatic (divergence) and dynamic (flutter) ones, are investigated. Influence of a damping on the critical velocity of the divergence and flutter instabilities is studied.