

В. Л. Поляков

Осветление суспензии фильтрованием с убывающим расходом

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)

Отримано ефективний розв'язок математичної задачі фільтрування малокоцентрованої суспензії крізь однорідне завантаження з убуючою в часі витратою і лінійною кінетикою масообміну. Його обґрунтування виконано шляхом зіставлення з частинним строгим розв'язком аналогічної задачі на типових прикладах. Помітне розходження між наближеними і точними розрахунковими кривими для основних характеристик фільтрування спостерігається за межами фільтроциклів.

Наряду с широко практикуемым на водоочистных сооружениях режимом фильтрования при постоянном расходе суспензии также нередко реализуется и другой режим — с убывающим расходом, имеющий ряд серьезных преимуществ [1, 2]. Постепенное снижение производительности фильтра в последнем случае обусловлено постоянством напоров на его входе и выходе (подводящих и отводящих коммуникациях), а также прогрессирующим накоплением осадка в пористой (зернистой) загрузке. Теоретические исследования действия фильтров во втором режиме существенно осложняются ввиду переменной скорости фильтрования V и массообменных коэффициентов α , β [3–6]

$$\alpha = \alpha_V V^r, \quad \beta = \beta_V V^q. \quad (1)$$

Таким образом, два блока (деформационный и гидродинамический), образующие общую математическую модель фильтрования малокоцентрированной суспензии [7], оказываются тесно взаимосвязанными, что и препятствует применению аналитических методов. Исключение составила работа [8], в которой удалось найти частное точное решение задачи фильтрования при $V = V(t)$ для единственной (линейной) формы зависимости коэффициентов α , β от V . Как раз указанное решение и используется в качестве эталонного для оценки построенного в данной работе приближенного решения. Более продуктивными в практическом отношении являются численные решения вышеупомянутой задачи и ее более сложных аналогов [9, 10]. Однако применять их в инженерной практике, как правило, способны только сами разработчики. Построенное же здесь эффективное аналитическое решение задачи фильтрования с убывающим расходом суспензии, а также расчетные зависимости на его базе послужат надежным инструментом при прогнозе развития комплексного процесса фильтрования, обосновании технологических и конструктивных параметров фильтров, действующих при заданном перепаде напоров.

Рассматриваемая математическая задача включает уравнение массопереноса

$$V(t) \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

уравнение линейной кинетики массообмена между твердой и жидкой фазами загрузки, в котором связь его коэффициентов со скоростью V учитывается, согласно (1),

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_V V^r(t) - \beta_V V^q(t)S, \quad (3)$$

уравнение движения

$$V(t) = -k(S_d) \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (4)$$

выражение для коэффициента фильтрации [11, 12]

$$k = k_0 \left[1 - \left(\frac{S_d}{n_0} \right)^{m_1} \right]^{m_2}, \quad (5)$$

соотношение между содержанием осадка и частиц суспензии в нем

$$S_d = \gamma S. \quad (6)$$

Краевой оператор имеет следующий вид:

$$z = 0, \quad C = C_0; \quad h = H_u; \quad (7)$$

$$z = L, \quad h = H_d; \quad (8)$$

$$t = 0, \quad S = 0. \quad (9)$$

Здесь C , S , S_d — объемные концентрации взвеси, иммобилизованных частиц и осадка; α_V , β_V — приведенные коэффициенты скорости прилипания взвешенных частиц и отрыва прилипших; h — напор; k_0 , n_0 — коэффициенты фильтрации и пористость чистой загрузки; m_1 , m_2 , γ — эмпирические коэффициенты; C_0 — исходная объемная концентрация взвеси; H_u , H_d — фиксированные входной и выходной напоры; L — высота загрузки.

Некоторое упрощение задачи (2)–(9) достигается введением относительных переменных и параметров $\bar{C} = C/C_0$, $\bar{S} = S/(n_0 C_0)$, $\bar{V} = V/V^0$, $\bar{\alpha}_V = \alpha_V L V^{0r-1}$, $\bar{\beta}_V = \beta_V n_0 L V^{0q-1}$; $\bar{k} = k/k_0$, $\bar{z} = z/L$, $\bar{t} = V^0 t/(n_0 L)$, $\bar{h} = (h - H_d)/(H_u - H_d)$, V^0 — начальная скорость фильтрования, выражаемая через другие параметры задачи

$$V^0 = k_0 \frac{H_u - H_d}{L},$$

а, кроме того, заменой переменных

$$\tau = \int_0^{\bar{t}} \bar{V}(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Тогда постановка математической задачи трансформируется таким образом:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \tau} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \tau} = \bar{\alpha}_V \bar{V}^{r-1} \bar{C} - \bar{\beta}_V \bar{V}^{q-1} \bar{S}, \quad (12)$$

$$\bar{V} = -\bar{k}(\bar{S}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{z}}, \quad (13)$$

$$\bar{k} = [1 - (\gamma C_0 \bar{S})^{m_1}]^{m_2}, \quad (14)$$

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{C} = 1; \quad \tilde{h} = 1; \quad (15)$$

$$\bar{z} = 1, \quad \tilde{h} = 0; \quad (16)$$

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{S} = 0. \quad (17)$$

Решается система уравнений (10)–(13) совместно с помощью осреднения \bar{V} , \bar{V}^{r-1} , \bar{V}^{q-1} по расчетному периоду $[0, T]$, причем

$$\bar{V}_c(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{V}(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (18)$$

Что касается \bar{V}^{r-1} , \bar{V}^{q-1} , то принимаются их средние значения

$$[\bar{V}^{r-1}]_c = \bar{V}_c^{r-1}, \quad [\bar{V}^{q-1}]_c = \bar{V}_c^{q-1}. \quad (19)$$

Обоснование равенств (18) выполняется согласно данным о поведении функции нерегулируемой скорости $\bar{V}(\bar{t})$ в реальных условиях. Принимая во внимание почти линейный характер изменения \bar{V} со временем и сравнительную малость ее изменения в течение фильтрационного цикла, оправдано функцию $\bar{V}(\bar{t})$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{t} = 0$ и сохранить его первые два члена. Тогда

$$\bar{V}(\bar{t}) \simeq 1 - a\bar{t},$$

где $a = -d\bar{V}/d\bar{t}(0) > 0$. В соответствии с (17) значение \bar{V}_c в промежутке времени от 0 до T приближенно будет

$$\bar{V}_c(T) \simeq 1 - \frac{a}{2}T. \quad (20)$$

Разложение в ряд Тейлора по T функции $\bar{V}_c^\alpha(T)$ с учетом (19) дает

$$\bar{V}_c^\alpha(T) \simeq 1 - \frac{\alpha a}{2}T. \quad (21)$$

В результате аналогичного разложения по \bar{t} функции $\bar{V}^\alpha(\bar{t})$ получено

$$\bar{V}^\alpha(\bar{t}) \simeq 1 - \alpha a \bar{t}. \quad (22)$$

Осреднение (21) по тому же периоду приводит к приближенному выражению

$$[\bar{V}^\alpha(\bar{t})]_c \simeq 1 - \frac{\alpha a}{2}T. \quad (23)$$

Равенство выражений для $[\bar{V}_c(T)]^\alpha$ и $[\bar{V}^\alpha(\bar{t})]_c$ может служить основанием для представления кинетического уравнения (11) в упрощенной форме

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \tau} = \bar{\alpha}_V \bar{V}_c^{r-1} \bar{C} - \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \bar{S}. \quad (24)$$

Следует подчеркнуть, что величина T в ходе решения задачи играет роль параметра и только в расчетных формулах она отождествляется со временем \bar{t} .

Решение уравнений (10), (23) при постоянных коэффициентах и условиях (14), (16) известно и в данном случае выражается зависимостями

$$\begin{aligned} \bar{C}(\bar{z}, \tau) = e^{-\bar{\alpha}_V \bar{V}_c^{r-1} \bar{z}} & \left[e^{-\bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \tau} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\alpha}_V \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{r+q-2} \bar{z} \tau} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \int_0^\tau e^{-\bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \eta} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\alpha}_V \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{r+q-2} \bar{z} \eta} \right) d\eta \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\bar{S}(\bar{z}, \tau) = \bar{\alpha}_V \bar{V}_c^{r-1} e^{-\bar{\alpha}_V \bar{V}_c^{r-1} \bar{z}} \int_0^\tau e^{-\bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \eta} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\alpha}_V \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{r+q-2} \bar{z} \eta} \right) d\eta, \quad (26)$$

где I_0 означает функцию Бесселя мнимого аргумента первого рода нулевого порядка. Из формул (24), (25) вытекают важные следствия, а именно, рост содержания взвеси в фильтрате и накопление осадка во входном сечении загрузки при $\bar{t} \gg 0$ будут происходить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{C}_e(\bar{t}; \bar{V}_c) = \bar{C}(1, \bar{t}; \bar{V}_c) = e^{-\bar{\alpha}_V \bar{V}_c^{r-1}} & \left[e^{-\bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \bar{t}} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\alpha}_V \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{r+q-2} \bar{t}} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \int_0^{\bar{V}_c \bar{t}} e^{-\bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \eta} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\alpha}_V \bar{\beta}_V \bar{V}_c^{r+q-2} \bar{z} \eta} \right) d\eta \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{S}_0(\bar{t}; \bar{V}_c) = \bar{S}(0, \bar{t}; \bar{V}_c) = \frac{\bar{\alpha}_V}{\bar{\beta}_V} \bar{V}_c^{r-q} (1 - e^{-\bar{\beta}_V \bar{V}_c^{q-1} \bar{t}}). \quad (28)$$

Для установления связи между \bar{V}_c и \bar{t} прежде всего уравнение (12) интегрируется в пределах от 0 до \bar{z} , так что с учетом условия (15) приведенный напор будет иметь вид

$$\tilde{h}(\bar{z}, \bar{t}; \bar{V}_c) = \bar{V}(\bar{t}) \int_{\bar{z}}^1 \frac{d\xi}{k(\bar{S}(\xi, \bar{t}; \bar{V}_c))}. \quad (29)$$

Выражение для относительной скорости фильтрования следует из (28) и с использованием второго условия (14) принимает вид

$$\bar{V}(\bar{t}; \bar{V}_c) = \left(\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{k(\bar{S}(\bar{z}, \bar{t}; \bar{V}_c))} \right)^{-1}. \quad (30)$$

Путем осреднения обеих частей равенства (29) в соответствии с (17) выводится недостающее уравнение относительно \bar{V}_c в неявной форме

$$\int_0^{\bar{t}} \left(\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{k(\bar{S}(\bar{z}, \lambda; \bar{V}_c))} \right)^{-1} d\lambda - \bar{V}_c \bar{t} = 0. \quad (31)$$

Для оценки точности приближенного решения, выраженного зависимостями (24)–(29) и уравнением (30), оно сопоставляется с известным строгим [6] на типичных примерах. Упомянутое эталонное решение является частным, так как отвечает только определенным значениям r, q ($r = q = 1$). Исходя из него, относительные концентрации при $\bar{t} \gg 1$ представляются в следующем виде:

$$\bar{C}(\bar{z}, \tau) = e^{-\bar{\alpha}\bar{z}} \left[e^{-\bar{\beta}\tau} I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}\tau}\right) + \bar{\beta} \int_0^\tau e^{-\bar{\beta}\eta} I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}\eta}\right) d\eta \right], \quad (32)$$

$$\bar{S}(\bar{z}, \tau) = \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha}\bar{z}} \int_0^\tau e^{-\bar{\beta}\eta} I_0\left(2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}\eta}\right) d\eta. \quad (33)$$

Время поступления на единицу поверхности загрузки объема суспензии τ , согласно этому решению, составляет

$$\bar{t} = \int_0^\tau \int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{S}(\bar{z}, \xi))} d\xi. \quad (34)$$

Точная формула для расчета скорости \bar{V} как функция от \bar{t} имеет близкую к (29) форму

$$\bar{V}(\tau) = \left(\int_0^1 \frac{d\bar{z}}{\bar{k}(\bar{S}(\bar{z}, \tau))} \right)^{-1}, \quad (35)$$

а τ играет роль параметра, связанного с переменной \bar{t} посредством (33).

Для проверки правомочности приема осреднения скорости фильтрования применительно к реальным условиям водоочистки рассчитан ряд примеров с характерными исходными данными. В частности, приняты для $\bar{\alpha}$ значения 4, 6, 8; для $\bar{\beta} = 0,005$, для $\gamma = 20$, а также высокая для доочистки мутных вод входная концентрация ($C_0 = 5 \cdot 10^{-5}$). Предметом расчетов по точным и приближенным формулам стало изменение со временем трех ключевых относительных характеристик — выходной концентрации \bar{C}_e , скорости \bar{V} и удельного объема осветленной суспензии τ . На рис. 1 показаны кривые $\bar{C}_e(\bar{t})$, рассчитанные по формулам (26), (31). Малое расхождение между соответствующими кривыми (1, 2; 3, 4; 5, 6) наблюдается лишь в конце расчетного периода, длительность которого заметно превосходит длительность фильтроцикла. В основном указанные кривые располагаются настолько близко друг к другу, что почти сливаются. Принятие весьма большого значения C_0 объясняется стремлением добиться резкого снижения величины \bar{V} в ходе работы фильтра, что, судя по рис. 2, и происходит в действительности. И здесь заметное отличие между результатами точных расчетов \bar{V} по формулам (32), (34) и приближенных по (25), (29) отмечается только после сокращения расхода суспензии на 60%. На практике подобное уменьшение производительности фильтра не оправдано по экономическим соображениям. Поэтому уже на основании рис. 1, 2 можно утверждать, что рекомендуемые для приложений формулы обеспечивают прогноз изменения характеристик фильтрования с высокой точностью. Наконец, данный вывод подтверждается и рис. 3, на котором изображены кривые нарастания объемов профильтрованной суспензии со временем для двух значений

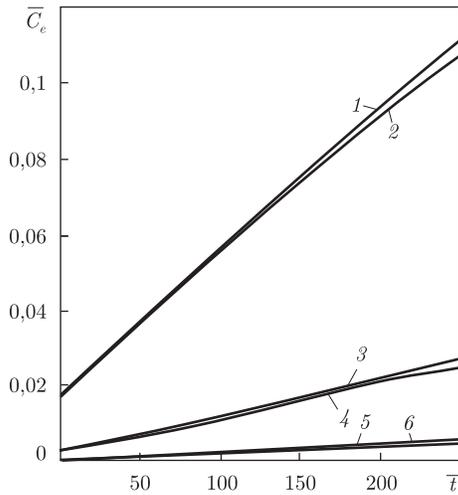


Рис. 1. Изменение относительной выходной объемной концентрации взвеси со временем:
 1, 3, 5 – приближенные значения; 2, 4, 6 – точные;
 1, 2 – $\bar{\alpha} = 4$; 3, 4 – $\bar{\alpha} = 6$; 5, 6 – $\bar{\alpha} = 8$

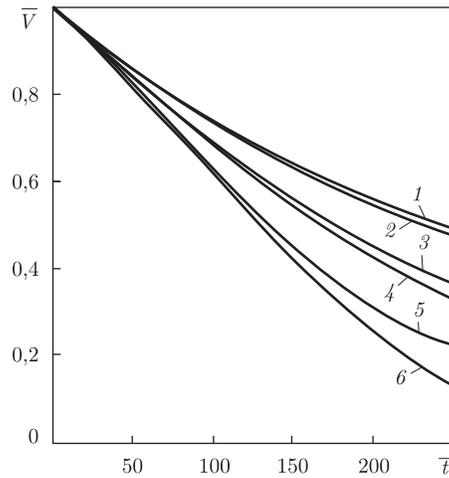


Рис. 2. Изменение скорости фильтрации со временем:
 1, 3, 5 – точные значения; 2, 4, 6 – приближенные;
 1, 2 – $\bar{\alpha} = 4$; 3, 4 – $\bar{\alpha} = 6$; 5, 6 – $\bar{\alpha} = 8$

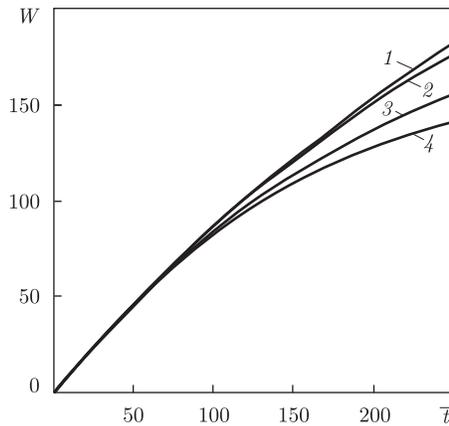


Рис. 3. Изменение удельного объема профильтрованной суспензии со временем:
 1, 3 – приближенные значения; 2, 4 – точные; 1, 2 – $\bar{\alpha} = 4$; 3, 4 – $\bar{\alpha} = 8$

$\bar{\alpha}$ (4, 8). Точные и приближенные значения τ слабо различаются в случае сильносорбирующей загрузки. Вместе с тем при умеренной сорбционной способности фильтрующего материала обе кривые практически совпадают до момента времени, которому соответствует $\bar{t} = 250$. Например, при $n_0 = 0,4$, $L = 1$ м, $V^0 = 5$ м/ч указанное время составит 20 часов.

В заключение следует подчеркнуть, что полученное выше аналитическое решение математической задачи фильтрации с убывающим расходом суспензии может служить надежным инструментом в теоретических исследованиях работы фильтровальных сооружений в соответствующем режиме, для обоснования их конструктивных и технологических параметров.

1. Akgiray O., Saatci A. M. An algorithm for bank operation of declining rate filters // Water Res. – 1998. – 32, No 7. – P. 2095. – 2105.

2. *Cleasby J. L.* Status of declining rate filtration design // *Water Sci. Technol.* – 1993. – **27**, No 10. – P. 151–164.
3. *Jegatheesan V., Vigneswaran S.* The effect of concentration on the early stages of deep-bed filtration of submicron particles // *Water Res.* – 1997. – **31**, No 11. – P. 2910–2913.
4. *McDowell L. M., Hunt J. R., Sitar N.* Particle transport through porous media // *Water Resour. Res.* – 1986. – **22**, No 13. – P. 1901. – 1921.
5. *O'Melia C. R.* Particles, pretreatment and performance in water filtration // *J. Envir. Engng.* – 1985. – **111**. – P. 874–890.
6. *Rajagopalan R., Tien C.* Trajectory analysis of deep-bed filtration with the sphere-in-a-cell porous media model // *AIChE J.* – 1976. – **2(3)**. – P. 523–533.
7. *Олейник А. Я., Тугай А. М.* Моделирование процессов коагуляции и суффозии в прифильтровой зоне скважины // *Доп. НАН України.* – 2001. – № 9. – С. 190–194.
8. *Поляков В. Л.* О фильтровании суспензий при заданном напоре // *Там само.* – 2005. – № 4. – С. 48–54.
9. *Грабовський П. О., Гурінчик Н. О.* Чисельна реалізація математичної моделі фільтрування // *Пробл. водопостачання, водовідведення та гідравліки.* – 2006. – Вип. 6. – С. 4–13.
10. *Chaundry F. H.* Theory of declining rate filtration. I. Continuous operation // *J. Environ. Eng. Din. ASCE.* – 1987. – **113(4)**. – P. 834–851.
11. *Аюкаев Р. И., Мельцер В. З.* Производство и применение фильтрующих материалов для очистки воды. Справ. пос. – Ленинград: Стройиздат, 1985. – 118 с.
12. *Минц Д. М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – Москва: Стройиздат, 1961. – 155 с.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.09.2009

V. L. Polyakov

Clarification of a suspension by filtration at a decreasing discharge

An effective solution to the mathematical task of low-content suspension filtration through a uniform filter medium has been obtained at a declining rate and the linear mass-exchange kinetics. It has been substantiated by comparison with a particular exact solution to the same task at a number of typical examples. The noticeable discrepancy between approximate and exact curves for the main filtration characteristics is observed out of the filter action period.