УДК 534.1

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

До теорії товщинних коливань пружних шарів з викривленими граничними поверхнями

Рівняння пружних радіальних коливань у сферичних координатах подано в операторній гамільтоновій формі за радіальною координатою. Вихідна система записана в єдиній для сферичних, циліндричних і прямокутних координат формі. Проаналізовано випадок гармонічних коливань.

У роботах [1, 2] (та інших роботах автора) система рівнянь пружних коливань у декартових прямокутних координатах вперше була приведена до операторної системи гамільтонового типу за просторовою координатою відносно відповідним чином вибраних умовно кажучи канонічних змінних. Це питання знайшло подальший розвиток у статтях [3, 4], в яких складнішими перетвореннями до операторної гамільтонової системи за радіальною координатою зведена система пружних рівнянь коливань в циліндричних координатах. У нашій роботі аналогічний результат одержано для випадку сферичних координат.

Будемо виходити з рівняння коливань

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{1}$$

і матеріальних залежностей

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}\frac{\partial u_r}{\partial r} + Nc_{13}\frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r} + N\left[c_{11} - \frac{1}{2}(N-1)(c_{11} - c_{12})\right]\frac{u_r}{r}, \end{aligned} \tag{2}$$

які є спільними для прямокутних, циліндричних і сферичних координат. При $N = 1$, $r \sim z$ рівняння (1), (2) відповідають прямокутним координатам, при $N = 1$ — циліндричним, при $N = 2$ — сферичним.

З першого рівняння системи (2) знаходимо

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} - N\frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{u_r}{r}. \tag{3}$$

Це дає можливість одержати такий вираз для $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{c_{13}}{c_{33}}\sigma_{rr} - \frac{1}{2}N[2c_{11**} - (N-1)(c_{11} - c_{12})]\frac{u_r}{r}, \tag{4}$$

в якому стала $c_{11**} = c_{11} - c_{13}^2 c_{33}^{-1}$.

Підставляючи формулу (4) в рівняння (1), одержимо

$$\frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{N}{r}\frac{c_{13}}{c_{33}}r^N\sigma_{rr} + r^N\left[\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2}\left(c_{11**} - \frac{N-1}{2}(c_{11} - c_{12})\right)u_r\right]. \tag{5}$$

Таким чином, одержали систему двох рівнянь

$$\frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{N}{r}\frac{c_{13}}{c_{33}} r^N \sigma_{rr} + r^N \left[\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2}\left(c_{11**} - \frac{N-1}{2}(c_{11} - c_{12})\right) u_r\right],$$
$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} - N\frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{u_r}{r} \qquad (6)$$

відносно функцій $r^N \sigma_{rr}$ та u_r. Після їх визначення напруження $\sigma_{\theta\theta}$ знаходяться за формулою (4).

Звернемо увагу на те, що система (6), як і вихідні співвідношення (1), (2), справедлива і у тому випадку, коли механічні параметри ρ, c_{ij} будуть кусково-неперервними функціями координати r з розривами першого роду. В точках розриву $r = r_*$ повинні виконуватись умови неперервності функцій σ_{rr} та u_r.

На граничних поверхнях $r = r_0$ та $r = r_1$ $(r_0 < r_* < r_1)$ необхідно задавати граничні умови за однією з альтернативних пар

$$u_r(r_0, t) = \overset{0}{\underset{r}{u}}(t) \vee \sigma_{rr}(r_0, t) = \overset{0}{\underset{rr}{\sigma}}(t),$$
$$u_r(r_1, t) = \overset{1}{\underset{r}{u}}(t) \vee \sigma_{rr}(r_1, t) = \overset{1}{\underset{rr}{\sigma}}(t). \qquad (7)$$

Якщо ввести канонічні змінні $r^N \sigma_{rr} = \widehat{q}_1$ та $u_r = \widehat{p}_1$, то систему (6) можна записати в операторній гамільтоновій формі [1] за просторовою координатою r

$$\frac{\partial \widehat{q}_1}{\partial r} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{p}_1}, \qquad \frac{\partial \widehat{p}_1}{\partial r} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{q}_1} \qquad (8)$$

з операторною функцією Гамільтона

$$\widehat{H}(\widehat{q}_1, \widehat{p}_1) = -\frac{1}{2}\frac{1}{c_{33} r^N}\widehat{q}_1^2 + \frac{N}{r}\frac{c_{13}}{c_{33}}\widehat{p}_1 \widehat{q}_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} r^N \left[\rho \partial_t^2 + \frac{N^2}{r^2}\left(c_{11**} - \frac{N-1}{2}(c_{11} - c_{12})\right)\right]\widehat{p}_1^2. \qquad (9)$$

Розглянемо випадок гармонічних коливань $f(r,t) = \operatorname{Re} f^a(r) \exp i\omega t$, використовуючи безрозмірні величини $c_{00}\overline{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}$, $c_{00}\overline{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}$, $h\overline{u}_r = u_r$, $\rho_{00}\overline{\rho} = \rho$, $\overline{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ і безрозмірну координату $hx = r - R$. В цьому випадку система рівнянь (6) набуває вигляду (безрозмірні позначення збережені тільки для частоти)

$$\frac{d}{dx}(1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a = \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x}\frac{c_{13}}{c_{33}}(1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a +$$
$$+ (1 + \varepsilon x)^N \left\{\frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2}\left[c_{11**} - \frac{N-1}{2}(c_{11} - c_{12})\right] - \rho\overline{\omega}^2\right\} u_r^a, \qquad (10)$$
$$\frac{du_r^a}{dx} = \frac{1}{c_{33}(1 + \varepsilon x)^N}(1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a - \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x}\frac{c_{13}}{c_{33}} u_r^a.$$

Система (10) є гамільтоновою системою [5] за координатою x

$$\frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \frac{dp_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \tag{11}$$

з канонічними змінними $q_1 = (1+\varepsilon x)^N \sigma^a_{rr}$, $p_1 = u^a_r$. Функція Гамільтона

$$H(q_1, p_1) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\overline{c}_{33}(1+\varepsilon x)^N} q_1^2 + \frac{N\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\overline{c}_{13}}{\overline{c}_{33}} q_1 p_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^N \left\{ \frac{N^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2}\left[\overline{c}_{11**} - \frac{N-1}{2}(\overline{c}_{11} - \overline{c}_{12}) - \overline{\rho}\,\overline{\omega}^2\right]\right\} p_1^2. \tag{12}$$

Систему (10) можна одержати з умови стаціонарності функціонала

$$\Phi = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left\{ u^a_r \frac{d}{dx}(1+\varepsilon x)^N \sigma^a_{rr} + \frac{1}{2}\frac{1}{\overline{c}_{33}(1+\varepsilon x)^N}((1+\varepsilon x)^N \sigma^a_{rr})^2 - \frac{N\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\overline{c}_{13}}{\overline{c}_{33}} r^N \sigma^a_{rr} u^a_r - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^N \left[\frac{N^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2}\left(\overline{c}_{11**} - \frac{N-1}{2}(\overline{c}_{11} - \overline{c}_{12}) - \overline{\rho}\,\overline{\omega}^2\right)\right] u^a_r u^a_r \right\} dx \tag{13}$$

при “ізохронних” варіаціях.

Для дослідження усталених резонансних гармонічних коливань треба скористатися концепцією комплексних модулів [6–8].

У випадку плоского шару задача про власні значення і власні форми має простий розв'язок:

при $u^a_x(-h) = 0$, $u^a_x(+h) = 0$ — власні частоти $\omega_n = \dfrac{\pi n}{2h}\sqrt{\dfrac{c_{33}}{\rho}}$, а відповідні власні форми — $\sin n\pi \dfrac{x}{2h}$, $n = 1, 2, \ldots$;

при $u^a_x(-h) = 0$, $\sigma^a_{xx}(+h) = 0$ — власні частоти $\omega_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{4h}\sqrt{\dfrac{c_{33}}{\rho}}$, а відповідні власні форми — $\sin \dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{x}{2h}$, $n = 1, 2, \ldots$;

при $\sigma^a_{xx}(-h) = 0$, $\sigma^a_{xx}(+h) = 0$ — власні частоти $\omega_n = \dfrac{(n-1)\pi}{2h}\sqrt{\dfrac{c_{33}}{\rho}}$, а відповідні власні форми — $\cos(n-1)\pi\dfrac{x}{2h}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Цей розв'язок може слугувати як контрольний при розв'язанні системи (9) у випадках $N = 1$ (циліндричні координати) та $N = 2$ (сферичні координати).

1. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
2. *Shulga N. A.* Propagation of elastic waves in periodic nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No 7. – P. 763–796.
3. *Шульга В. М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80–82.
4. *Шульга В. М.* О распространении упругих волн в ортотропных цилиндрах // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 7. – С. 34–41.

5. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. В 2-х т. Т 2. – Москва: Наука, 1977. – 439 с.
6. *Савін Г. М., Рущицький Я. Я.* Елементи механіки спадкових середовищ. – Київ: Вища шк., 1976. – 252 с.
7. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
8. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 25.08.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shulga**

To the theory of thickness vibrations of elastic layers with curved boundary surfaces

Equations for elastic radial vibrations in spherical coordinates are represented in the operator Hamilton form on a radial coordinate. The initial system is written down in a form single for spherical, cylindrical, and rectangular coordinates. The case of harmonic vibrations is analyzed.