Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2010

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3(075.8)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Тригонометрические формулы полных сопротивлений *RL*, *RC*, *RLC* электроцепей

Пропонуються адекватні класичним тригонометричні формули повних опорів RL, RC, RLC електричних кіл.

В теоретических основах электротехники, например в [1], законсервировались формулы полных сопротивлений RL, RC, RLC электроцепей в соответствующем виде

$$z_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \qquad z_C = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \qquad z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (1)$$

Однако при проведении экспериментов с указанными электроцепями, используя осциллограф, омметр, измеряющий активное сопротивление, при синусоидальном входном напряжении $U(t) = U_a \sin\omega t$, где U_a — амплитуда; ω — круговая частота; t — время, зная U_a, R и сдвиг фаз φ между $U(t)$ и током $i(t)$ в цепи, задаваясь любым значением угла ωt независимо от частоты, можно определить полное сопротивление этой цепи. Поясним наше утверждение.

Возьмем цепь RL. Уравнение этой цепи следующее:

$$U_a \sin\omega t = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = RI_a \sin(\omega t - \varphi) + \omega L \cos(\omega t - \varphi), \qquad (2)$$

где I_a — амплитуда тока.

Из (2) получаем полное сопротивление

$$z_{RL} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{R\sin(\omega t - \varphi) + \omega L\cos(\omega t - \varphi)}{\sin\omega t}. \qquad (3)$$

В (3) введем тригонометрические преобразования [2] $\sin(\omega t \pm \varphi) = \sin\omega t\cos\varphi \pm \cos\omega t \sin\varphi$, $\cos(\omega t \pm \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi \mp \sin\omega t\sin\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$. С учетом этих преобразований (3) принимает вид

$$z_{RL} = R\frac{(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi) + \operatorname{tg}\varphi(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi)}{\sin\omega t}. \qquad (4)$$

Формула (4) представляет собой тригонометрическую форму полного сопротивления в RL цепи. Проверим соответствие этой формулы формуле (1) для RL цепи. При этом будем учитывать, что $\sin\varphi = \omega L/\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$; $\cos\varphi = R/\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$. Зададимся несколькими значениями углов ωt, например, пока 0, $\pi/4$, $\pi/2$, π. Тогда из (4) получим $z_{RL0} = R\dfrac{2\sin\varphi}{0} = \infty$, что, в принципе, является неопределенностью. Для четкого выяснения применим правило Лопиталя [2], продифференцировав по t числитель и знаменатель (4) и подставив затем $\omega t = 0$. В результате находим

$$z_{L0} = R(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\sin\varphi) = R\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} + \frac{(\omega L)^2}{R\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\right) = \sqrt{R^2+(\omega L)^2},$$

$$z_{L\pi/4} = R\left[\cos\varphi - \sin\varphi + \frac{\omega L}{R}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right] = \sqrt{R^2+(\omega L)^2},$$

$$z_{L\pi/2} = R\cos\varphi + \omega L\sin\varphi = \sqrt{R^2+(\omega L)^2},$$

$$z_{L\pi} = \frac{R\sin\varphi + \omega L\cos\varphi}{0} = \infty,$$

что также является неопределенностью. Применяя правило Лопиталя к (4) и подставляя $\omega t = \pi$, получим

$$z_{L\pi} = R(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\sin\varphi) = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}.$$

Итак, в результате проведенной проверки убеждаемся, что формула (4) адекватна классической формуле полного сопротивления RL цепи.

Перейдем теперь к исследованию RC цепи. Уравнение этой цепи такое:

$$U_a\sin\omega t = RI_a\sin(\omega t+\varphi) + \frac{I_a}{c}\int\sin(\omega t+\varphi)\,dt = Ri_a\sin(\omega t+\varphi) - \frac{I_a}{\omega c}\cos(\omega t+\varphi). \quad (5)$$

Из (5) получаем выражение полного сопротивления в виде

$$z_{RC} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{R\sin(\omega t+\varphi_C) - \dfrac{1}{\omega c}\cos(\omega t+\varphi)}{\sin\omega t}, \quad (6)$$

где $\varphi_C = \operatorname{arctg}(1/(R\omega c))$. Здесь также можно задаться любым углом ωt и определить соответствие (6) классической формуле полного сопротивления для RC цепи. Для краткости возьмем $\omega t = \pi/4$. Применим также к (6) те же тригонометрические преобразования. Тогда (6) будет следующим:

$$z_{RC} = R\frac{(\sin\omega t\cos\varphi_C + \cos\omega t\sin\varphi_C) - \operatorname{tg}\varphi_C(\cos\omega t\cos\varphi_C - \sin\omega t\sin\varphi_C)}{\sin\omega t}. \quad (7)$$

Подставив в (7) $\omega t = \pi/2$, получим

$$z_{RC\pi/2} = R\cos\varphi_C + \frac{1}{\omega c}\sin\varphi_C = \frac{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega c}\right)^2}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$

Здесь также видна адекватность (6) или (7) классической формуле полного сопротивления в RC цепи. Другие значения $\omega t = 0$, $\pi/4$, π подставлять не будем, так как в этих случаях также видна рассматриваемая адекватность формул.

Далее рассмотрим RLC цепь (последовательное соединение R, L, C)

$$U(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)\,dt$$

или при $U(t) = U_a \sin\omega t$, $i(t) = I_a \sin(\omega t \pm \varphi)$ это уравнение принимает вид

$$U_a \sin\omega t = RI_a \sin(\omega t \pm \varphi_C) + \omega L \cos(\omega t \pm \varphi_C) - \frac{1}{\omega c}\sin(\omega t \pm \varphi_C),$$

откуда полное сопротивление

$$z_{RLC} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{1}{\sin\omega t}\left[R\sin(\omega t \pm \varphi) + \omega L\cos(\omega t \pm \varphi) - \frac{1}{\omega c}\sin(\omega t \pm \varphi)\right], \tag{8}$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}{R}, \qquad \sin\varphi_{RLC} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi_{RLC} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}}.$$

Применяя к (8) те же тригонометрические преобразования, находим

$$z_{RLC} = \frac{1}{\sin\omega t}R[\sin\omega t\cos\varphi \pm \cos\omega t\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi(\cos\omega t\cos\varphi \mp \sin\omega t\sin\varphi)]. \tag{9}$$

Подставив в (9) $\omega t = \pi/2$, получим

$$z_{RLC\pi/2} = R(\cos\varphi \mp \operatorname{tg}\varphi\sin\varphi). \tag{10}$$

При $\omega L > 1/\omega c$, $\varphi < 0$. Тогда (10) имеет вид

$$z_{RLC\pi/2} = R(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\sin\varphi) = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}} + \frac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2},$$

т. е. и в этом случае тригонометрические формулы (8), (9) соответствуют классической.

Далее при $\omega L < 1/\omega c$, $\varphi > 0$. $\omega t = \pi/2$ (9) имеет вид

$$z_{RLC\pi/2} = R(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\sin\varphi) = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}} + \frac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega c}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}.$$

Здесь также видна полная адекватность тригонометрической формулы полного сопротивления z_{RLC} классической формуле.

Теперь рассмотрим RLC цепь при параллельном соединении L и C и $L \parallel C$ соединены последовательно с R. Уравнения такой цепи следующие:

$$\left.\begin{aligned} &U(t) = Ri(t) + L\frac{di_L(t)}{dt}, \\ &U(t) = Ri(t) + \frac{1}{c}\int i_C(t)\,dt, \\ &i(t) = i_L(t) + i_C(t). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Для этой цепи можно применить правило определения токов $i_L(t)$ и $i_C(t)$

$$\left.\begin{aligned} &i_L(t) = i(t)\frac{-\dfrac{1}{\omega c}}{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}; \\ &i_C(t) = i(t)\frac{\omega L}{\omega L - \dfrac{1}{\omega c}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Здесь также $U(t) = U_a\sin\omega t$, $i(t) = I_a\sin(\omega t \pm \varphi)$ и тогда (11) с учетом (12) записывается выражениями

$$U_a\sin\omega t = RI_a\sin(\omega t \pm \varphi) - I_a\omega L\frac{\cos(\omega t \pm \varphi)}{\omega^2 Lc - 1}. \tag{13}$$

Уравнение (13) соответствует двум уравнениям (11). Из (13) получаем полное сопротивление рассматриваемой цепи

$$z_{RL\parallel C} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{1}{\sin\omega t}\left[R\sin(\omega t \pm \varphi) - \frac{\omega L\cos(\omega t \pm \varphi)}{\omega^2 Lc - 1}\right]. \tag{14}$$

Здесь $\operatorname{arctg}\varphi = -\dfrac{\omega L}{(\omega^2 Lc - 1)R}$. Формулу (14) можно представить в виде

$$z_{RL\parallel C} = \frac{1}{\sin\omega t}R[\sin(\omega t \pm \varphi) + \operatorname{tg}\varphi\cos(\omega t \pm \varphi)]. \tag{15}$$

Применяя к (15), как и ранее, тригонометрические преобразования, получим выражение, подобное (9). Далее повторяем такую же процедуру, как для цепи RLC при последовательном соединении элементов. Здесь также $z_{RL\|C} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega c)^2}$, т. е. полное соответствие классической формуле.

Заметим, что, приравнивая тригонометрическое формулы полных сопротивлений к классическим в соответствующих электроцепях, можно при известных R и ω определять величины L и C в RL, RC цепях соответственно. В RLC — для определения L и C необходимо иметь два уравнения, так как имеются два неизвестных параметра. Поэтому предлагается в эксперименте измерить в электроцепи угол $\varphi = \varphi_1$ при RLC_1, а затем изменить частоту с ω_1 на ω_2 и опять измерить угол $\varphi = \varphi_2$. Для цепи $RL \parallel C$ процедура подобная.

Активное сопротивление в исследуемой электроцепи можно определить следующим методом: дважды подключить последовательно с электроцепью известные активные сопротивления R_1 и R_2. Затем измерить углы φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда получим, например, в RL цепи $\operatorname{tg}\varphi_1 = \omega L/(R + R_1)$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = \omega L/(R + R_2)$, где R — неизвестное активное сопротивление.

Из этих формул получаем

$$(R + R_1)\operatorname{tg}\varphi_1 = (R + R_2)\operatorname{tg}\varphi_2,$$

откуда находим активное сопротивление, описываемое выражением

$$R = \frac{R_2 \operatorname{tg}\varphi_2 - R_1 \operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Если же необходимо вычислить частоту ω, то в цепь с активным сопротивлением R следует последовательно включить известную емкость C и тогда получим $\operatorname{tg}\varphi = 1/(\omega c R)$, откуда $\omega = 1/(R \operatorname{ctg} \varphi)$.

Итак, приведем формулы, определяющие L и C в рассматриваемых электроцепях. Для RL, RC цепей $L = (R/\omega)\operatorname{tg}\varphi_L$, $C = 1/(\omega R \operatorname{tg}\varphi_C)$. Для цепи RLC индуктивность L и емкость C выражается формулами

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{\omega_1}\left(R\operatorname{tg}\varphi_1 + \frac{\omega_2 \operatorname{tg}\varphi_1 - \omega_1 \operatorname{tg}\varphi_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\right); \\ C &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{R\omega_1\omega_2(\omega_2 \operatorname{tg}\varphi_1 - \omega_1 \operatorname{tg}\varphi_2)}. \end{aligned}\right\}$$

Для цепи $RL \parallel C$ L и C имеют вид

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{R \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{\omega_1[\omega_1 \operatorname{tg}\varphi_1(\omega_2 \operatorname{tg}\varphi_1 - \omega_1 \operatorname{tg}\varphi_2) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\operatorname{tg}\varphi_2]}; \\ C &= \frac{\omega_2 \operatorname{tg}\varphi_1 - \omega_1 \operatorname{tg}\varphi_2}{R \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2(\omega_2^2 + \omega_1^2)}. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, в результате данного исследования выведены тригонометрические формулы полных сопротивлений в RL, RC, RLC, $RL \parallel C$ электроцепях, которые полностью адекватны классическим формулам [1]. Полученные тригонометрические формулы при эксперименте облегчают нахождение полных сопротивлений рассматриваемых электроцепей. В эксперименте определяются активное сопротивление R и угол φ между $U(t)$ и $i(t)$. Для определения L и C в RLC и $RL \parallel C$ цепях следует варьировать один раз частотой ω, т. е. иметь в распоряжении значения углов φ_1 и φ_2 при ω_1 и ω_2 соответственно.

По нашему мнению, представленные тригонометрические формулы полных сопротивлений электроцепей могут войти в справочники по электротехнике.

1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 17.01.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

Trigonometric formulae for complete resistances of *RL*, *RC*, and *RLC* electric circuits

The trigonometric formulae for complete resistances of RL, RC, RLC electric circuits are offered. These formulae are adequate to the classical ones.