УДК 533.9;517.9

И. М. Цифра

Использование симметрии для построения решений уравнений Максвелла в среде

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

Методом групової редукції отримано аналітичний розв'язок рівнянь Максвелла в середовищі. Знайдено класи неоднорідних середовищ, для яких розв'язки рівнянь Максвелла генеруються з розв'язків для однорідного середовища. Отримані результати можна використовувати для тестування числових методів розв'язання тривимірних задач геоелектрики в неоднорідних середовищах.

Как известно, решение трехмерных электродинамических задач является одной из актуальных проблем современной геоэлектрики [1]. В частности, в настоящее время общеизвестен существенно трехмерный характер магнитотеллурики. Большинство существующих алгоритмов решения обратных задач основано на более или менее точных конечно-разностных методах решения прямой задачи и оптимизационных алгоритмах инверсии. Однако в случае сложных моделей среды с использованием разностных сеток с десятками тысяч ячеек даже решение одной прямой задачи требует огромных вычислительных ресурсов [1]. В связи с этим мы хотим обратить внимание на возможность использования симметрии уравнений Максвелла в материальных средах для построения их аналитических решений.

Симметрии и построение решений системы уравнений Максвелла и материальных уравнений. Известно, что уравнения Максвелла в среде (без материальных уравнений)

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}, \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{2}$$

инвариантны относительно бесконечной группы Ли преобразований зависимых и независимых переменных [2, 3]. Этот факт доказывается с помощью инфинитезимального метода [4, 5]. Элементы соответствующей алгебры Ли задаются формулами

$$X = \xi^{\mu}(k)\frac{\partial}{\partial k_{\mu}} + \eta^{E^a}\frac{\partial}{\partial E^a} + \eta^{B^a}\frac{\partial}{\partial B^a} + \eta^{D^a}\frac{\partial}{\partial D^a} + \eta^{H^a}\frac{\partial}{\partial H^a} + \eta^{j^a}\frac{\partial}{\partial j^a} + \eta^{\rho^a}\frac{\partial}{\partial \rho^a}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
&\eta^{E^a} = -\xi^0_0 E^a - \xi^b_a E^b - \varepsilon_{abc}\xi^b_0 B^c, \qquad \eta^{B^a} = (\xi^0_0 + d)B^a + \xi^a_b B^b + \varepsilon_{abc}\xi^0_b E^c,\\
&\eta^{D^a} = (\xi^0_0 + d)D^a + \xi^a_b D^b - \varepsilon_{abc}\xi^0_b H^c, \qquad \eta^{B^a} = -\xi^0_0 H^a - \xi^b_a H^b - \varepsilon_{abc}\xi^b_0 D^c,\\
&\eta^{j^a} = -dj^a + \xi^a_b j^b + \xi^a_0\rho, \qquad \eta^{\rho} = -d\rho + \xi^0_0\rho + \xi^0_b j^b, \qquad d = -(\xi^0_0 + \xi^1_1 + \xi^2_2 + \xi^3_3),
\end{aligned} \tag{4}$$

$\xi_{\mu}(x)$ — произвольные гладкие функции, $t \equiv x_0$ $\xi^{\mu}_{\nu} = \partial\xi^{\mu}/\partial x_{\nu}$, μ, $\nu = \overline{0,3}$. Таким образом, уравнения (1), (2) инвариантны относительно произвольных преобразований t, $\vec{x}$, образующих группу Ли. В то же время векторы $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{j}$ и плотность ρ, изменяются в соответствии с линейным представлением этой группы. Система уравнений (1), (2) — недоопределенная. Для описания электромагнитого поля в среде необходимо рассматривать также материальные уравнения, явный вид которых зависит от свойств среды. Если в уравнения (3), (4) положить $\xi^\mu = 2(cx)x_\mu - x^2 c_\mu + a_{\mu\nu}x^\nu + b_\mu$, где c_μ, $a_{\mu\nu}$, b_μ — произвольные действительные константы, то получаем алгебру Ли группы Ли конформных преобразований зависимых и независимых переменных. Следовательно, уравнения Максвелла в среде, так же как уравнения Максвелла в вакууме — конформно-инвариантны.

Оказывается, что существуют и материальные уравнения вида

$$\vec{D} = M\vec{E} + N\vec{B}, \qquad \vec{H} = M\vec{B} - N\vec{E}, \tag{5}$$

где M и N — произвольные функции от $I_1 = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$, $I_2 = \vec{B}\cdot\vec{E}$ такие, что совместно с уравнениями (1), (2) они образуют пуанкаре-инвариантную систему. Если же $M \equiv M(I_1/I_2)$, $N \equiv N(I_1/I_2)$, то уравнения (1), (2), (5) инвариантны относительно конформной группы. Более того, уравнения Максвелла с материальными уравнениями Минковского в движущейся среде [2]

$$\vec{D} + \vec{u}\times\vec{H} = \varepsilon(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}), \qquad \vec{B} + \vec{E}\times\vec{u} = \mu(\vec{H} + \vec{D}\times\vec{u}), \tag{6}$$

где $\vec{u}$ — скорость движения среды; ε — диэлектрическая и μ — магнитная проницаемость неподвижной среды также конформно-инвариантны. При этом $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{j}$ и ρ преобразуются по линейному закону, в то время как скорость $\vec{u}$ изменяется нелинейным образом.

С помощью операторов симметрии можно построить специальные подстановки (анзацы) для полей $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, которые редуцируют систему уравнений Максвелла, и материальных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Проиллюстрируем этот метод на примере трехмерной подалгебры с базисными элементами

$$J_{0a} = x_0\partial_{x_a} + x_a\partial_{x_0} + S_{0a}, \qquad P_1 = \partial_{x_1}, \qquad P_2 = \partial_{x_2}, \qquad a = \overline{1,3},$$

где

$$S_{01} = E^2\partial_{B^3} - E^3\partial_{B^2} - B^2\partial_{E^3} + B^3\partial_{E^2} + D^2\partial_{H^3} - D^3\partial_{H^2} - H^2\partial_{D^3} + H^3\partial_{D^2};$$
$$S_{03} = E^1\partial_{B^2} - E^2\partial_{B^1} - B^1\partial_{E^2} + B^2\partial_{E^1} + D^1\partial_{H^2} - D^2\partial_{H^1} - H^1\partial_{D^2} + H^2\partial_{D^1} \quad -$$

алгебры инвариантности уравнений (1), (2), (5). Рассмотрим случай, когда $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$. Этой алгебре, согласно общей теории инвариантных решений [4, 5], ставится в соответствие анзац

$$\begin{aligned}
E^1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\widetilde{E}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\widetilde{B}_2 - \frac{x_1}{\xi}\widetilde{E}_3 + \frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{B}_2 - \widetilde{E}_1),\\
E^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} + \xi\right)\widetilde{E}_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} - \xi\right)\widetilde{B}_1 + \frac{x_1}{\xi}\widetilde{B}_3 + \frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{E}_2 - \widetilde{B}_1),\\
E^3 &= \widetilde{E}_3 - x_1(\widetilde{B}_2 - \widetilde{E}_1),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&B^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)\widetilde{B}_1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)\widetilde{E}_2-\frac{x_1}{\xi}\widetilde{B}_3-\frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{E}_2-\widetilde{B}_1),\\
&B^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)\widetilde{B}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)\widetilde{E}_1-\frac{x_1}{\xi}\widetilde{E}_3+\frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{B}_2-\widetilde{E}_1),\\
&B^3=\widetilde{B}_3-x_1(\widetilde{E}_2+\widetilde{B}_1),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&D^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)\widetilde{D}_1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)\widetilde{H}_2-\frac{x_1}{\xi}\widetilde{D}_3+\frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{H}_2-\widetilde{D}_1),\\
&D^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)\widetilde{D}_2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)\widetilde{H}_1+\frac{x_1}{\xi}\widetilde{H}_3+\frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{D}_2-\widetilde{H}_1),\\
&D^3=\widetilde{D}_3-x_1(\widetilde{H}_2-\widetilde{D}_1),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&H^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)\widetilde{H}_1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)\widetilde{D}_2-\frac{x_1}{\xi}\widetilde{H}_3-\frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{D}_2-\widetilde{H}_1),\\
&H^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}+\xi\right)\widetilde{H}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi}-\xi\right)\widetilde{D}_1-\frac{x_1}{\xi}\widetilde{D}_3+\frac{x_1^2}{2\xi}(\widetilde{H}_2-\widetilde{D}_1),\\
&H^3=\widetilde{H}_3-x_1(\widetilde{D}_2-\widetilde{H}_1),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\widetilde{E}_a$ $\widetilde{B_a}$, $\widetilde{D_a}$, $\widetilde{H_a}$ — неизвестные функции от переменной $\omega = x_0^2 - x_1^2 - x_3^2$, а $\xi = x_0 - - x_3$. Подставляя равенства (7)–(10) в выражения (1), (2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{B}_1'+\widetilde{E}_2')\omega+\widetilde{B}_1'-\widetilde{E}_2'+\widetilde{B}_1+\widetilde{E}_2=0,\\
&(\widetilde{B}_2'-\widetilde{E}_1')\omega+\widetilde{B}_2'+\widetilde{E}_1'+2(\widetilde{B}_2-\widetilde{E}_1)=0,\\
&\widetilde{B}_3'=0,\qquad \widetilde{B}_3=0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{H}_1'+\widetilde{D}_2')\omega-\widetilde{H}_1'+\widetilde{D}_2'+2(\widetilde{H}_1+\widetilde{D}_2)=0,\\
&(\widetilde{H}_2'-\widetilde{D}_1')\omega-(\widetilde{H}_2'+\widetilde{D}_1')+\widetilde{H}_2-\widetilde{D}_1=0,\\
&\widetilde{D}_3'=0,\qquad \widetilde{D}_3=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Материальные уравнения (5) сводятся к таким соотношениям:

$$
\widetilde{\vec{D}}=M\widetilde{\vec{E}}+N\widetilde{\vec{B}},\qquad \widetilde{\vec{H}}=M\widetilde{\vec{B}}-N\widetilde{\vec{E}},
\tag{13}
$$

где M, N — функции от $\widetilde{I_1}=\widetilde{\vec{E}}^2-\widetilde{\vec{B}}^2$, $\widetilde{I_2}=\widetilde{\vec{B}}\widetilde{\vec{E}}$. Таким образом, задача построения инвариантного решения сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (12), (13). Рассмотрим частный случай, когда $N = 0$. Решая эту систему и используя равенства (7)–(10), получаем решения уравнений Максвелла (1), (2) с материальными уравнениями (5) при $N = 0$ в таком виде:

$$
E^1=\frac{2C_1x_3}{(x_0^2-x_1^2-x_3^2)^{3/2}},\qquad B^1=-\frac{2C_1x_3}{(x_0^2-x_1^2-x_3^2)^{3/2}},
$$

$$E^2 = \frac{2C_1 x_0}{(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{3/2}}, \qquad B^2 = \frac{2C_1 x_0}{(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{3/2}},$$
$$E^3 = -\frac{2C_1 x_1}{(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{3/2}}, \qquad B^3 = \frac{2C_1 x_1}{(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{3/2}}, \tag{14}$$

где $C_1 = \mathrm{const}$. Решения для $\vec{D}$, $\vec{H}$ строятся из материальных уравнений

$$\vec{D} = m\vec{E}, \qquad \vec{H} = m\vec{B}, \tag{15}$$

где $m = M(0)$.

Как известно, преобразования из группы симметрии переводят произвольное решение в решение того же уравнения. Используя это свойство, мы построили формулы для генерирования новых решений уравнений Максвелла из известных решений $\vec{D}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$, $\vec{E}(t,\vec{x})$, $\vec{H}(t,\vec{x})$ такого вида:

$$\vec{E}_n = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\vec{E}(t',\vec{x}') - \frac{2\theta(\theta-1)}{\sigma}\vec{x}\times\vec{B}(t',\vec{x}') + \frac{2\theta^2}{\sigma}[\vec{E}(t',\vec{x}')\vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x}\vec{E}(t',\vec{x}'))]\right\}, \tag{16}$$

$$\vec{B}_n = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\vec{B}(t',\vec{x}') + \frac{2\theta(\theta-1)}{\sigma}\vec{x}\times\vec{E}(t',\vec{x}') + \frac{2\theta^2}{\sigma}[\vec{B}(t',\vec{x}')\vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x}\vec{B}(t',\vec{x}'))]\right\}, \tag{17}$$

$$\vec{D}_n = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\vec{D}(t',\vec{x}') - \frac{2\theta(\theta-1)}{\sigma}\vec{x}\times\vec{H}(t',\vec{x}') + \frac{2\theta^2}{\sigma}[\vec{D}(t',\vec{x}')\vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x}\vec{D}(t',\vec{x}'))]\right\}, \tag{18}$$

$$\vec{H}_n = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\vec{H}(t',\vec{x}') - \frac{2\theta(\theta-1)}{\sigma}\vec{x}\times\vec{D}(t',\vec{x}') + \frac{2\theta^2}{\sigma}[\vec{H}(t',\vec{x}')\vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x}\vec{H}(t',\vec{x}'))]\right\}, \tag{19}$$

$$t' = \frac{t - \theta(t^2 - \vec{x}^2)}{\sigma}, \qquad \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{\sigma}, \qquad \sigma = 1 - 2\theta t + \theta^2(t^2 - \vec{x}^2),$$

где θ — групповой параметр. Подобным образом строятся решения уравнений Максвелла в неоднородной среде из решений для однородной среды. Рассмотрим простейший случай, относящийся к магнитостатике. Выбирая $\xi^a = f_a(x_a)$, $f_a(x_a)$ — произвольные гладкие функции своих аргументов и интегрируя соответствующую систему Ли, находим групповые преобразования для $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$:

$$\vec{E}' = \vec{E}, \qquad \vec{B}' = \vec{B}\frac{f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)}{f_1(x_1')f_2(x_2')f_3(x_3')},$$
$$\vec{H}' = \vec{H}, \qquad \vec{D}' = \vec{D}\frac{f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)}{f_1(x_1')f_2(x_2')f_3(x_3')}, \tag{20}$$

где x_a' — решения задачи Коши системы уравнений Ли

$$\frac{dx_a}{d\theta} = f_a(x_a'), \qquad x_a'(\theta = 0) = x_a. \tag{21}$$

В рамках этого подхода строятся решения уравнений Максвелла с неоднородностью

$$\mu' = \mu\frac{f_1(x_1')f_2(x_2')f_3'(x_3')}{f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)}.$$

Аналогично можно построить решения для неоднородной среды в случае электростатики. Подобная идея используется для построения решений уравнения диффузии тепловых нейтронов в неоднородной среде [6].

Таким образом, в работе показано, что знание трехмерной алгебры Ли группы инвариантности позволяет свести задачу построения решений уравнений Максвелла в трехмерном случае к одномерному с помощью метода групповой редукции. Построено аналитическое решение уравнений Максвелла в среде. Используя конформную инвариантность системы (1), (5), получены формулы генерирования новых решений $\vec{E}_n$, $\vec{B}_n$, $\vec{D}_n$, $\vec{H}_n$ из известных $\vec{E}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$, $\vec{D}(t,\vec{x})$, $\vec{H}(t,\vec{x})$. В рамках этого подхода установлен класс эквивалентности неоднородных сред, для которых решения уравнений Максвелла связаны соответствующими групповыми преобразованиями. Полученные результаты представляют полезную информацию, необходимую для тестирования численных методов решения трехмерных задач геоэлектрики в неоднородных средах.

1. *Жданов М. С.* Быстрые методы решения обратных электромагнитных задач // Электромагнитные исследования земных недр / Под ред. В. В. Спичака. – Москва: Науч. мир, 2005. – С. 76–90.
2. *Tsyfra I.* Symmetry of the Maxwell and Minkowski equations system // J. Geom. Symm. Phys. – 2007. – **9**. – P. 75–81.
3. *Цифра И., Мессина А., Чижицкий Т.* Свойства симметрии и их использование при решении уравнений Максвелла в неоднородных средах // Геофиз. журн. – 2008. – **30**, № 1. – P. 111–117.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.
6. *Козачок И. А., Цифра И. М.* Теоретико-групповой анализ физических полей в градиентно-неоднородных средах и его применение в проблеме диффузии тепловых нейтронов // Геофиз. журн. – 2004. – **26**, № 2. – С. 122–127.

Институт геофизики им. С. И. Субботина
НАН Украины, Киев
Институт математики, Университет
в Белостоке, Польша

Поступило в редакцию 30.09.2009

I. M. Tsyfra

Using the symmetry for constructing solutions of the Maxwell equations in a medium

An analytic solution of the Maxwell equations in a medium has been obtained with the help of the group reduction method. A class of heterogeneous media, for which the solution of the Maxwell equations can be obtained from the solution for a homogeneous medium is found. The results obtained can be used for testing the numerical methods of solving the three-dimensional geoelectric problems in heterogeneous media.