ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 514.9
© 2010

Ю. А. Аминов

Решение проблемы построения подмногообразия по заданному грассманову образу

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Доведені достатні умови розв'язання проблеми побудови підмноговиду за заданим грассмановим образом.

1. Грассманов образ подмногообразия является обобщением гауссова образа двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве на подмногообразия произвольной размерности и коразмерности. Его определение следующее. Пусть в $(n+p)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+p} задано регулярное n-мерное подмногообразие F^n. Пусть N_x^p — нормальное пространство в точке $x \in F^n$ и N^p — пространство, размерности p, в E^{n+p}, параллельное N_x^p и проходящее через фиксированную точку O. Пространство N^p рассматриваем как точку P грассманова многообразия $G_{p,n+p}$. Отображение $\psi\colon F^n \to G_{p,n+p}$, сопоставляющее точке x точку P, называется грассмановым отображением, а его образ — грассмановым образом.

2. Грассманов образ несет важную полезную информацию о поведении подмногообразия F^n.

В работе рассматривается следующая задача:

По заданному регулярному n-мерному подмногообразию Γ^n, лежащему в $G_{p,n+p}$, построить регулярное n-мерное подмногообразие F^n в E^{n+p}, имеющее Γ^n своим грассмановым образом.

Ясно, что эта задача не всегда имеет решение. Для двумерных поверхностей проблема решена автором в работах [1–3], где доказаны теоремы существования и единственности для произвольной коразмерности. Изложение этих результатов дано также в [4]. Несколько позже появились работы Вайнера [5, 6].

В работе А. А. Борисенко [7] доказана теорема единственности при произвольной размерности и некотором ограничении на коразмерность. В работах В. А. Горькавого [8–10] рассматривалась задача восстановления многомерного подмногообразия, но с вырожденным грассмановым образом, а в его же работе [11] даны необходимые и достаточные условия для восстановления подмногообразия в случае $n = 3$. Эти условия выглядят довольно сложно.

3. Задание подмногообразия Γ^n может производиться различными способами. Один из них — это задание с помощью плюккеровых координат пространства N^p. Если в E^{n+p} выбран фиксированный ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{n+p}$ и в N^p выбран ортонормированный базис $n_1, \ldots, n_p$ так, что вектор n_α имеет координаты $\{\xi_\alpha^i\}$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_{n+p}$, то плюккеровы координаты N^p определяются в виде

$$p^{k_1 \ldots k_p} = \begin{vmatrix} \xi_1^{k_1} & \ldots & \xi_1^{k_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_p^{k_1} & \ldots & \xi_p^{k_p} \end{vmatrix}.$$

Плюккеровы координаты не являются независимыми. Они связаны между собой некоторыми соотношениями, которые выпишем ниже.

Подмногообразие Γ^n определено заданием плюккеровых координат в виде функций от n координат

$$p^{k_1 \ldots k_p} = p^{k_1 \ldots k_p}(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Орты $e_1, \ldots, e_n$ назовем горизонтальными, а орты $e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}$ — вертикальными.

Будем решать проблему в следующей постановке: найти подмногообразие F^n в явном виде, определенное над пространством E^n с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы в точке $x \in F^n$, проектирующейся на E^n в точку $\overline{x}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$, нормальное пространство N_x^p имело плюккеровы координаты (1).

Далее предполагается, что $p^{n+1 \ldots n+p} \neq 0$ в некоторой области $G \subset E^n$.

Введем два набора индексов $I_1 = (1, \ldots, n)$ и $I_2 = (n+1, \ldots, n+p)$.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема. *При выполнении условий совместности*

$$\left(\frac{p^{ij_1 \ldots j_{p-1}}}{p^{n+1 \ldots n+p}} \right)_{x_k} = \left(\frac{p^{kj_1 \ldots j_{p-1}}}{p^{n+1 \ldots n+p}} \right)_{x_i}, \tag{2}$$

где i, $k \in I_1$, $j_\alpha \in I_2$, существует и единственно с точностью до параллельного переноса в направлении вертикальных ортов подмногообразие $F^n \subset E^{n+p}$, имеющее в точке $x \in F^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ заданные плюккеровы координаты

$$p^{k_1 \ldots k_p}(x_1, \ldots, x_n)$$

нормального пространства N_x^p, т. е. имеющее заданный грассманов образ.

4. Пусть радиус-вектор $r(x_1, \ldots, x_n)$ подмногообразия F^n записывается в виде

$$r(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \\ z^{n+1} \\ \ldots \\ z^{n+p} \end{pmatrix},$$

где $z^j = z^j(x_1, \ldots, x_n)$ — регулярные функции класса C^2, $j = n+1, \ldots, n+p$.

Для доказательства используем несколько лемм. Леммы 1 и 2 устанавливают связь плюккеровых координат с производными функций z^j.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant k < p$, *наборы индексов* $j_1, \ldots, j_{p-k}$ *и* $j_{p-k+1}, \ldots, j_p$ *дополняют друг друга до набора* $n+1, \ldots, n+p$. *Тогда*

$$p^{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{p-k}} = p^{n+1 \ldots n+p} (-1)^{pk} \epsilon(\alpha) [\operatorname{grad} z^{j_{p-k+1}}, \ldots, \operatorname{grad} z^{j_p}]^{i_1 \ldots i_k}, \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают поливектор в E^n, *индексы* $i_1 \ldots i_k$ *сверху при квадратных скобках обозначают компоненту этого поливектора и* α *есть подстановка*

$$\alpha = \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_p \\ n+1 & \ldots & n+p \end{pmatrix}.$$

В частности, при $k = 1$ имеем

$$p^{i_1 j_1 \ldots j_{p-1}} = p^{n+1 \ldots n+p} (-1)^p z_{i_1}^{j_p} \epsilon(\alpha). \tag{4}$$

Эту систему уравнений используем в дальнейшем как начальный этап индукции. Введем величины

$$A^{\rho\sigma} = \delta^{\rho\sigma} + (\operatorname{grad} z^\rho \operatorname{grad} z^\sigma).$$

Здесь $\delta^{\rho\sigma}$ — символ Кронекера,

Лемма 2. *Имеет место выражение*

$$(p^{n+1 \ldots n+p})^2 = \frac{1}{\det \|A^{\rho\sigma}\|}. \tag{5}$$

Итак, все плюккеровы координаты нормального пространства подмногообразия F^n выражены через производные функций z^j.

Лемма 3. *Система уравнений*

$$\begin{aligned} & p^{i_1 \ldots [i_p} p^{n+1 \ldots n+p]} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & p^{j_1 \ldots j_k i_1 \ldots [i_{p-k}} p^{n+1 \ldots n+p]} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & p^{j_1 \ldots j_{p-2} i_1 [i_2} p^{n+1 \ldots n+p]} = 0, \\ & \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_p}^{n+p} (p^{k_1 \ldots k_p})^2 = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

является полной системой независимых уравнений, определяющих вложение грассманова многообразия $G_{p,n+p}$ *в евклидово пространство* E^N, *где* $N = C_{n+p}^p$.

Эта лемма доказана в монографии [4, с. 302–303].

Для доказательства теоремы рассмотрим систему уравнений (4). Эти уравнения определяют производные всех функций z^j по координатам x_i. Очевидно, для определения функций z^j необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия совместности (2). С помощью леммы 3 доказывается, что остальные выражения плюккеровых координат (3) и (5) являются следствием принадлежности подмногообразия Γ^n грассманову многообразию $G_{p,n+p}$.

Указанные достаточные условия разрешимости (2) являются и необходимыми в следующем смысле. Так как каждое регулярное подмногообразие может быть представлено в явном виде, то это означает, что на каждом подмногообразии Γ^n, являющемся грассмановым образом, должна найтись система координат, в которой (2) будет выполнено.

1. *Аминов Ю. А.* О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. – 1980. – **23**. – С. 3–16.
2. *Аминов Ю. А.* Определение поверхности в E^4 по заданному грассманову образу // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 2. – С. 147–160.
3. *Аминов Ю. А.* Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Мат. заметки. – 1984. – **36**, № 2. – С. 223–228.
4. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002. – 467 с.
5. *Weiner J. L.* The Gauss map for surfaces in 4-spaces // Math. Ann. – 1984. – **269**, No 4. – P. 541–560.
6. *Weiner J. L.* The Gauss map for surfaces. The affine case. Part I // Trans. AMS. – 1986. – **293**, No 2. – P. 431–446; Part II. The Euclidean case // Ibid. – 1986. – **293**, No 2. – P. 447–466.
7. *Борисенко А. А.* Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 1. – С. 8–15.
8. *Горькавый В. А.* О восстановлении 3-мерного подмногообразия 5-мерного евклидова пространства по вырожденному 2-мерному грассманову образу // Мат. физика. Анализ. Геометрия. – 1995. – **2**. – С. 25–41.
9. *Горькавый В. А.* О восстановлении подмногообразия в евклидовом пространстве по вырожденному в линию грассманову образу // Мат. заметки. – 1996. – **59**. – С. 681–691.
10. *Горькавый В. А.* Теорема редукции в проблеме восстановления подмногообразия в евклидовом пространстве по заданному грассманову образу // Мат. физика. Анализ. Геометрия. – 1996. – **4**. – С. 309–333.
11. *Горькавый В. А.* Восстановление трехмерных подмногообразий евклидова пространства с большой коразмерностью по грассманову образу // Мат. заметки. – 1997. – **62**. – С. 694–699.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 06.10.2009

Yu. A. Aminov

A solution of the problem on the construction of a submanifold with given Grassmann image

We present conditions sufficient for a submanifold in the Grassmann manifold to be the Grassmann image of a submanifold in the Euclidean space.