УДК 517.581



**Н. О. Вірченко, С. М. Заїкіна**

# Про нові узагальнені інтегральні перетворення

*(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)*

*Робота присвячена теорії нових інтегральних перетворень, що узагальнюють класичні інтегральні перетворення Лапласа, Стільтьєса і Віддера в теорії потенціалу. Ядрами цих інтегральних перетворень використано $(\tau, \beta)$-узагальнені конфлюентні гіпергеометричні функції. Доведено формули обернення для нових інтегральних перетворень, встановлено рівності типу Парсеваля–Гольдштейна. Подано деякі приклади застосувань нових інтегральних перетворень.*

Метод інтегральних перетворень є одним з ефективних сучасних аналітичних методів розв'язання крайових задач математичної фізики, астрофізики, термодинаміки, біотехніки, багатьох проблем прикладного аналізу, інженерних задач та ін. Різноманітні застосування методу інтегральних перетворень подані в науковій літературі (див., наприклад, [1–7]). Однак потрібно зазначити, що існує велика низка складніших задач, які не можуть бути розв'язаними за допомогою класичних інтегральних перетворень, а їх можна розв'язати, використавши інтегральні перетворення зі спеціальними функціями в ядрах.

Підкреслимо, що серед інтегральних перетворень зі спеціальними функціями саме інтегральні перетворення з функціями гіпергеометричного типу часто зустрічаються при розгляді практичних задач. Посилений інтерес до інтегральних перетворень зі спеціальними функціями також можна обгрунтувати широким застосуванням методу інтегральних перетворень до розв'язання та дослідження складніших інтегральних рівнянь, до парних, потрійних, $N$-арних інтегральних рівнянь тощо.

Нові узагальнення спеціальних функцій гіпергеометричного типу дають можливість використовувати ці функції в теорії та практиці нових узагальнень класичних інтегральних перетворень.

Дана робота й присвячена питанням теорії нових інтегральних перетворень з узагальненими гіпергеометричними функціями. Доведено формули обернення для нових інтегральних перетворень, подано рівності типу Парсеваля–Гольдштейна, розглянуто кілька ілюстративних прикладів.

**1.** Запровадимо нові узагальнення класичних інтегральних перетворень Лапласа, Стільтьєса, Віддера в теорії потенціалу за допомогою $(\tau, \beta)$-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$, доведемо формули обернення.

Розглянемо такі узагальнені інтегральні перетворення.

*а) Узагальнені інтегральні рівняння Лапласа:*

$$\widetilde{L}_m\{f(x);y\} = \int\limits_0^\infty x^{m-1}e^{-x^m y^m}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x^m y^m)^\gamma)f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(x);y\} = \int\limits_0^\infty x^{\gamma_2}e^{-(xy)^{\gamma_1}}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(xy)^{\gamma\gamma_1})f(x)\,dx, \tag{2}$$

де $x > 0$, $\gamma \in C$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $b \geqslant 0$, $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$; $x^{\gamma_2} f(x) < Me^{s_0 x^{\gamma_1}}$; $M$, $s_0$ — сталі; ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ — $(\tau,\beta)$-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [8]:

$$
{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (c,\tau) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| zt^{\tau} \right] dt, \tag{3}
$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$; $\{\tau,\beta\} \subset R$, $\tau > 0$, $\beta > 0$; $\tau - \beta < 1$; $B(a, c-a)$ — класична бета-функція [9], ${}_1\Psi_1$ — гіпергеометрична функція Райта [1]:

$$
{}_p\Psi_q(z) \equiv {}_p\Psi_q \left[ \begin{array}{c} (a_i;\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j;\beta_j)_{1,q} \end{array} \middle| z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + n\alpha_i)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + n\beta_j)} \cdot \frac{z^n}{n!} \tag{4}
$$

$z \in C$; $a_i$, $b_j \in C$; $\alpha_i$, $\beta_j \in R = (-\infty, +\infty)$; $\alpha_i$, $\beta_j \neq 0$; $i = 1,2,\ldots,p$; $j = 1,2,\ldots,q$.

Зауважимо, що якщо в (1) покласти $m = 1$, $b = 0$, а в (2) $b = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = 1$, то одержимо класичне інтегральне перетворення Лапласа [3]:

$$
L\{f(x);y\} = \int\limits_0^{\infty} e^{-xy} f(x)\, dx.
$$

*б) Узагальнене інтегральне перетворення Стільтьєса:*

$$
\widetilde{G}_p\{f(x);y\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int\limits_0^{\infty} \frac{f(x)}{(x+y)^p}\, {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a,\tau);(p,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\gamma} \right] dx, \tag{5}
$$

де $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} c > 0$, $p > 0$; $b \geqslant 0$; $\gamma > 0$; ${}_2\Psi_1$ — функція вигляду (4). Очевидно, що при $b = 0$ з (5) одержимо інтегральне перетворення Стільтьєса [3].

*в) Узагальнені інтегральні перетворення потенціалу:*

$$
\widetilde{P}_{m,1}\{f(x);y\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int\limits_0^{\infty} \frac{x^{m-1} f(x)}{x^m + y^m}\, {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a,\tau);(1,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b\left(\frac{x^m}{x^m + y^m}\right)^{\gamma} \right] dx, \tag{6}
$$

$$
P_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u);x\} = \widetilde{P}_1\{f(u);x\} \equiv
$$

$$
\equiv \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\gamma_2} f(u)}{(x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})^{\gamma_3}}\, {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a_1,\tau);(a_2,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b\left(\frac{u^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1}}\right)^{\gamma_4} \right] du, \tag{7}
$$

$$
P_2^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u);x\} = \widetilde{P}_2\{f(u);x\} \equiv
$$

$$
\equiv \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int\limits_0^{\infty} \frac{u^{\gamma_2} f(u)}{(x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})^{\gamma_3}}\, {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a_1,\tau);(a_2,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| -b\left(\frac{x^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1}}\right)^{\gamma_4} \right] du, \tag{8}
$$

де $\mathrm{Re}\,a_1 > 0$, $\mathrm{Re}\,a_2 > 0$, $\mathrm{Re}\,c > 0$; $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1,4}$; $\{\tau, \beta\} \subset R$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\tau - \beta < 1$; $b \geqslant 0$, ${}_2\Psi_1$ — функція вигляду (4). При $b = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = p$ в (7), (8) матимемо інтегральне перетворення Стільтьєса [3].

Якщо ж $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$, $a_2 = 1$ в (7), (8), то одержимо відповідні інтегральні перетворення, розглянуті в [10] (формули (13), (14)).

**Теорема 1** (формула обернення для (2)). *За умов існування інтегрального перетворення* $\widetilde{L}_{\gamma_1},\ \gamma_2,\ \gamma\{f(x); x\}$ *справедлива формула*

$$f(u) = \frac{\gamma_1 \Gamma(a)}{\Gamma(c)} u^{-\gamma_2} \int\limits_0^{\infty} (ux)^{-1} g(x) K(ux)\, dx, \tag{9}$$

*де*

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{\xi(s)} ds,$$

$$g(y) = \widetilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma}\{f(x); y\}, \qquad \xi(s) = {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a, \tau); \left(\dfrac{s}{\gamma_1}, \gamma\right) \\ (c, \beta) \end{array} \middle| -b \right].$$

**Доведення.** Застосуємо інтегральне перетворення Мелліна до обох частин (2); врахувавши, що ряд для ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z)$ абсолютно збігається для всіх $z \in C$, виконаємо перетворення

$$M\{g(x); s\} = \frac{1}{\gamma_1} M\left\{ e^{-\nu} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b\nu^{\gamma}); \frac{s}{\gamma_1} \right\} M\{f(u); \gamma_2 - s + 1\};$$

$$M\left\{ e^{-\nu} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b\nu^{\gamma}); \frac{s}{\gamma_1} \right\} = \int\limits_0^{\infty} \nu^{\frac{s}{\gamma_1} - 1} e^{-\nu} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b\nu^{\gamma}) d\nu =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \tau n)}{\Gamma(c + \beta n)} \frac{(-b)^n}{n!} \left( \int\limits_0^{\infty} \nu^{\frac{s}{\gamma_1} - 1 + \gamma n} e^{-\nu} d\nu \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a, \tau); \left(\dfrac{s}{\gamma_1}, \gamma\right) \\ (c, \beta) \end{array} \middle| -b \right];$$

$$M\{f(u); \gamma_2 + 1 - s\} = \frac{\gamma_1 \Gamma(c)}{\Gamma(a)} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a, \tau); \left(\dfrac{s}{\gamma_1}, \gamma\right) \\ (c, \beta) \end{array} \middle| -b \right]^{-1} M\{g(x); s\}.$$

Застосувавши до останнього формулу обернення інтегрального перетворення Мелліна, одержимо (9).

Аналогічно доводимо теорему про формулу обернення для узагальненого інтегрального перетворення $\widetilde{L}_m\{f(x); y\}$.

**Теорема 2.** *За умов існування інтегрального перетворення*

$$\widetilde{L}\{f(x); y\} = \int\limits_0^{\infty} e^{-(xy)} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(xy)^{\gamma}) f(x)\, dx \tag{10}$$

*справедлива формула*

$$f(x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} \int\limits_0^{\infty} (tx)^{-1} g(t)\theta(tx)\, dt, \tag{11}$$

*де*

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{\zeta(s)} ds, \qquad \zeta(s) = {}_2\Psi_1 \left[ \begin{array}{c} (a,\tau); (s,\gamma) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| b \right].$$

Виконавши в (1) заміну $x^m = z$, одержимо

$$\widetilde{L}_m\{f(x); y\} = \frac{1}{m} \widetilde{L}\{f(\sqrt[m]{z}); y^m\},$$

а після застосування формули обернення для $\widetilde{L}\{f(x); y\}$ (11) матимемо формулу обернення для узагальненого інтегрального перетворення $\widetilde{L}_m\{f(x); y\}$.

Формули обернення для узагальнених інтегральних перетворень $\widetilde{G}_p$, $P_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}$, відповідно, мають вигляд

$$f(y) = \Gamma(p) \widetilde{L}^{-1}\{x^{1-p} L^{-1}\{h(z); x\}; y\}, \qquad h(z) = \widetilde{G}_p\{f(y), z\}; \tag{12}$$

$$f(y) = \widetilde{L}^{-1}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma} \left\{ \widetilde{L}^{-1}_{\gamma_1,\gamma_2,a_2-1} \left\{ \frac{\Gamma(a_2)}{\gamma_1} g_1(z); x \right\}; y \right\}, \qquad g_1(z) = P_1^{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4}\{f(u); x\}. \tag{13}$$

**2**. Розглянемо властивості вищезапроваджених нових інтегральних перетворень.

Властивість лінійності виконується для усіх розглянутих інтегральних перетворень, наприклад, для узагальненого інтегрального перетворення Лапласа має вигляд

$$\widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma} \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x); y \right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f_i(x); y\}, \qquad c_i = \mathrm{const}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

а властивість подібності подамо в такій формі:

$$\widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(ax); y\} = \frac{1}{a^{\gamma_2+1}} \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma} \left\{ f(x); \frac{y}{a} \right\}. \tag{15}$$

**Теорема 3.** *Якщо функції $f(x) \in L(0; +\infty)$, $g(x) \in L(0; +\infty)$, то справедлива рівність типу Парсеваля–Гольдштейна*

$$\int\limits_0^{\infty} u^{\gamma_2} \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(t); u\} g(u)\, du = \int\limits_0^{\infty} t^{\gamma_2} \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{g(u); t\} f(t)\, dt \tag{16}$$

*за умови абсолютної збіжності інтегралів.*

Доведення легко здійснюється, якщо, згідно з умовою теореми, виконати заміну порядку інтегрування та врахувати означення (2).

Аналітично для інтегральних перетворень (7), (8) за умови абсолютної збіжності інтегралів матимемо

$$\int\limits_0^\infty x^{\gamma_2}\widetilde{P}_1\{f(t);x\}g(x)\,dx = \int\limits_0^\infty x^{\gamma_2}\widetilde{P}_2\{g(t);x\}f(x)\,dx. \tag{17}$$

**Теорема 4.** *При існуванні інтегралів та їх абсолютній збіжності справедлива рівність*

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{L}_m\{f(x);y\}\,dy = \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{1}{m},\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\middle|-b\right]\int\limits_0^\infty x^{m-2}f(x)\,dx. \tag{18}$$

**Доведення.** Проінтегруємо обидві частини (1) за змінною $y$ в проміжку від 0 до $\infty$:

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{L}_m\{f(x);y\}dy = \int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty x^{m-1}e^{-x^m y^m}f(x)\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x^m y^m)^\gamma)dx\right]dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty x^{m-1}f(x)\left[\int\limits_0^\infty e^{-x^m y^m}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-b(x^m y^m)^\gamma)dy\right]dx =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{1}{m},\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\middle|-b\right]\int\limits_0^\infty x^{m-2}f(x)\,dx.$$

**Наслідок.** *Якщо в* (18) *покласти* $m=1$, $f(x)=e^{-xy}g(x)$, *то одержимо*

$$\int\limits_0^\infty \widetilde{L}\{e^{-xu}g(x);y\}\,dy = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);(1,\gamma)\\ (c,\beta)\end{array}\middle|-b\right]L\left\{\frac{g(x)}{x};u\right\}, \tag{19}$$

*де* $L$ *— класичне інтегральне перетворення Лапласа* [3].

Застосовуючи (19) та відому таблицю перетворень Лапласа [3], можна знаходити значення інтегралів вигляду лівої частини (19) для різних функцій $g(x)$.

Зауважимо, що якщо в (2) покласти $\gamma_2 = m-1$, $\gamma_1 = m$, то після обчислень отримаємо

$$\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\widetilde{L}_{m,m-1,\gamma}\{f(t);x\}dx = \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\mu}{m};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\middle|-b\right]\int\limits_0^\infty t^{m-\mu-1}f(t)\,dt, \tag{20}$$

а з останньої формули при $f(t)=e^{-tu}g(t)$ матимемо зручну формулу для обчислення інтегралів вигляду

$$\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\widetilde{L}_{m,m-1,\gamma}\{e^{-tu}g(t);x\}dx =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\mu}{m};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\middle|-b\right]L\{t^{m-1-\mu}g(t);u\}, \tag{21}$$

тут $L$ — класичне інтегральне перетворення Лапласа [3].

За допомогою формул (19), (21) або виконавши безпосередні обчислення з використанням означення узагальнених інтегральних перетворень, подамо деякі приклади:

$$1)\ \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{\eta(x);y\} = \frac{1}{\gamma_1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{1}{y^{\gamma_2+1}}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\gamma_2+1}{\gamma_1};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\Bigg|-b\right],$$

де $\eta(x) = \begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$2)\ \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{x^k;y\} = \frac{1}{\gamma_1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{1}{y^{k+\gamma_2+1}}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\gamma_2+k+1}{\gamma_1};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\Bigg|-b\right].$$

$$3)\ \widetilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{e^{-kx^{\gamma_1}};y\} = \frac{1}{\gamma_1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{1}{(y^{\gamma_1}+k)^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}}}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\gamma_2+1}{\gamma_1};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\Bigg|-b\Big(\frac{y^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1+k}}\Big)^{\gamma}\right].$$

$$4)\ \int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\widetilde{L}_{m,m-1,\gamma}\{t^{\mu+\nu-m+1}e^{-tu}(t+\alpha)^{-1};x\}\,dx =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\mu}{m};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\Bigg|-b\right]\Gamma(\nu+1)\alpha^\nu e^{\alpha u}\Gamma(-\nu;\alpha u).$$

Тут було враховано формулу з [3]

$$L\{t^\nu(t+\alpha)^{-1};u\} = \Gamma(\nu+1)\alpha^\nu e^{\alpha u}\Gamma(-\nu;\alpha u); \qquad \operatorname{Re} u>0.$$

5) Аналогічно, врахувавши з [3] формулу

$$L\{\cos\alpha t;u\} = u(u^2+\alpha^2)^{-1}; \qquad \operatorname{Re} u > |\operatorname{Im}\alpha|,$$

матимемо з (21)

$$\int\limits_0^\infty x^{\mu-1}\widetilde{L}_{m,m-1,\gamma}\{t^{\mu-m+1}e^{-tu}\cos\alpha t;x\}dx =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{array}{c}(a,\tau);\left(\dfrac{\mu}{m};\gamma\right)\\ (c,\beta)\end{array}\Bigg|-b\right]u(u^2+\alpha^2)^{-1}.$$

1. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall, 2004. – 390 p.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: Физматгиз, 1961. – 524 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. – Москва: Наука, 1968. – Т. 1. – 344 с.
4. *Вірченко Н.* Парні ($N$-арні) інтегральні рівняння. – Київ: Задруга, 2009. – 476 с.
5. *Sneddon I.* The use of integral transforms. – New York: McGraw-Hill, 1972. – 539 p.

6. *Debnath L.* Integral Transforms and their applications. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – 456 p.
7. *Srivastava H. M., Yürekli O.* A theorem on Stieltjes-type integral transforms and its applications // Complex Var. Theory Appl. – 1995. – **28**. – P. 159–168.
8. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its applications // J. Fract. Calculus and Appl. Anal. – 2006. – **9**, No 2. – P. 101–108.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.
10. *Вірченко Н. О., Заїкіна С. М.* Узагальнені інтегральні перетворення і їх застосування // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 6 (62). – С. 133–137.

*НТУ України "Київський політехнічний інститут"*
*Волгоградський державний університет*

*Надійшло до редакції 25.12.2009*

**N. O. Virchenko, S. M. Zaikina**

## On new generalized integral transforms

*We present new integral transforms, generalizing the classical Laplace, Stieltjes, and Widder integral transforms in the potential theory. The $(\tau, \beta)$-generalized confluent hypergeometric functions are the kernels of these integral transforms. Inverse formulae for new integral transforms are proved. Relations of the Parseval–Goldstein type are established. Some examples of applications of the new integral transforms are given.*