УДК 517.9

Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов

Метод исследования динамических контактных задач с нелинейным демпфированием

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Скопецким)

Розглянуто клас динамічних контактних задач нелінеаризованої теорії в'язкопружності, які зводяться до диференціально-операторних включень другого порядку в спеціальних класах нескінченновимірних просторів. Досліджено властивості розв'язуючого оператора. Одержано нові апріорні оцінки розв'язків.

1. Постановка задачи. В данной работе рассматриваются задачи анализа и управления дифференциально-операторными включениями второго порядка с отображениями квазимонотонного типа. Такие задачи часто возникают при исследовании математических моделей нелинейных процессов и полей нелинеаризированной теории вязкоупругости и пьезоэлектрики [1–3]. Для мотивации рассмотрим пример динамической контактной задачи, которая сводится к упомянутому включению в бесконечномерном пространстве.

Рассмотрим вязкоупругое тело, которое в недеформированном состоянии заполняет ограниченную область $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$. Предположим, что граница $\Gamma = \partial\Omega$ регулярна [4] и Γ разделена на три попарно непересекающиеся измеримые части Γ_D, Γ_N и Γ_C так, что $\mathrm{meas}(\Gamma_C) > 0$ [1]. Тело зажато на Γ_D так, что поле перемещений обращается там в ноль. Предположим также, что заданный вектор объемной силы f_1 распределен в Ω, а поверхностная сила f_2 распределена на Γ_D. Тело может войти в контакт с основанием по потенциальной контактной поверхности Γ_C. Положим $Q = \Omega \times S$, $S = [\tau, T]$, $-\infty < \tau < T < +\infty$. В качестве $u\colon Q \to R^d$ обозначим поле перемещений, в качестве $\sigma\colon Q \to S_d$ — тензор напряжения, а в качестве $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ — тензор деформации, где $i, j = \overline{1, d}$, S_d — пространство $R_s^{d\times d}$ симметричных матриц порядка d. В качестве u_N и u_T обозначим нормальную и тангенциальную компоненты перемещения u на Γ, $u_N = u \cdot n$, $u_T = u - u_N n$, где n — единичный вектор внешней нормали к Γ. Аналогично, нормальная и тангенциальная компонента поля напряжения на Γ задается через $\sigma_N = (\sigma n) \cdot n$ и $\sigma_T = \sigma n - \sigma_N n$ соответственно. В качестве u_0 и u_1 обозначим начальное перемещение и начальную скорость. Классическая формулировка контактной задачи имеет вид [1, 3]: найти такие $u\colon Q \to R^d$ и $\sigma\colon Q \to S_d$, что

$$\begin{cases} u'' - \operatorname{div}\sigma = f_1 \quad \text{в} \quad Q, \\ \sigma \in \aleph(\varepsilon(u')) + \Im(\varepsilon(u)) \quad \text{в} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D \times (0, T), \\ \sigma n = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_N \times (0, T), \\ -\sigma_N \in \partial j_N(x, t, u_N, \varsigma), \qquad -\sigma_T \in \partial j_T(x, t, u_T, \xi) \quad \text{на} \quad \Gamma_C \times (0, T), \\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1 \quad \text{в} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $j_N(\cdot,\cdot,\cdot,\varsigma)\colon \Gamma_C\times(0,T)\times R^d\to\mathbb{R}$ и $j_T(\cdot,\cdot,\cdot,\xi)\colon \Gamma_C\times(0,T)\times R^d\to\mathbb{R}$ — локально липшицевы по последним переменным функции, ∂j_N, ∂j_T — субдифференциалы Кларка соответствующих функционалов $j_N(x,t,\cdot,\varsigma)$, $j_T(x,t,\cdot,\xi)$ [5].

Для вариационной постановки такой задачи положим

$$H_0=L_2(\Omega;R^d),\qquad \overline{H}_0=L_2(\Omega;S_d),$$

$$\overline{H}_1=\{u\in H_0\mid \varepsilon(u)\in\overline{H}_0\}=H^1(\Omega;R^d),\qquad V_0=\{v\in\overline{H}_1\mid v=0 \text{ на } \Gamma_D\}.$$

Используя формулу Грина, определение субдифференциала Кларка [5, 6] при соответствующей гладкости начальных данных можно получить (детально см. [1, 7]) вариационную постановку задачи (1) на поиск таких $u\colon[0,T]\to V$ и $\sigma\colon[0,T]\to\overline{H}_0$, что

$$\begin{cases}\langle u''(t),v\rangle_{V_0}+(\sigma(t),\varepsilon(v))_{\overline{H}_0}+\displaystyle\int_{\Gamma_C}(j_N^0(x,t,u_N;v_N;\varsigma)+j_T^0(x,t,u_T;v_T;\xi))\,d\Gamma(x)\geqslant\\ \qquad\geqslant\langle f(t),v\rangle_{V_0}\quad\text{для всех}\quad v\in V_0\quad\text{и п.в.}\quad t\in[0,T],\\ u(0)=u_0,\qquad u'(0)=u_1,\end{cases}$$

где

$$\langle f(t),v\rangle_{V_0}=(f_1(t),v)_{H_0}+(f_2(t),v)_{L_2(\Gamma_N;R^d)}\quad\text{для всех}\quad v\in V_0\quad\text{и п.в.}\quad t.$$

Пусть $V=L_2(0,T;V_0)$, $W=\{w\in V\mid w'\in V^*\}$ и $\overline{\gamma}\colon H^\delta(\Omega;R^d)=:Z_0\to H^{1/2}(\Gamma;R^d)\subset\subset L_2(\Gamma;R^d)$ — оператор следа, $\delta\in(1/2;1)$. Заметим, что V_0, Z_0 — действительные сепарабельные банаховы пространства, H_0 — действительное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным H_0^*. Вложение $H_0\subset Z_0$ компактное и плотное [4], а вложение $Z_0\subset H_0$ непрерывное и плотное. Получим такую цепочку непрерывных и плотных вложений [4, 8] $V_0\subset Z_0\subset H_0\subset Z_0^*\subset V_0^*$, где Z_0^* и V_0^* — соответствующие топологически сопряженные пространства с Z_0 и V_0. Заметим, что вложения $V\subset Z\subset H\subset Z^*\subset V^*$ непрерывные и плотные. Более того, вложение $W\subset Z$ компактное [9, 10], а вложение $W\subset C(S;H_0)$ непрерывное [4, 10].

Введем многозначные отображения $A\colon V\to C_v(V^*)$, $B_0\colon V_0\to V_0^*$ и $C\colon Z\times K\to C_v(Z^*)$ с непустыми выпуклыми слабо компактными значениями в соответствующих пространствах:

$$A(u)=\{d\in V^*\mid d(t)\in A_0(t,y(t)) \text{ для п.в. } t\in S\},\qquad u\in V,$$

$$\langle B_0u,v\rangle_{V_0}=(\Im(x,\varepsilon(u)),\varepsilon(v))_{\overline{H}_0}\qquad\forall\,u,v\in V_0,\qquad t\in[0,T],$$

$$C(u,\eta)=\{d\in Z^*\mid d(t)\in\overline{\gamma}^*(\partial J(t,\overline{\gamma}u(t),\eta)) \text{ для п.в. } t\in[0,T]\},$$

где для п. в. $t\in S$; $A_0(t,\cdot)\colon V_0\to C_v(V_0^*)$,

$$\sup_{d\in A_0(t,u)}\langle d,v\rangle_{V_0}=\sup\{(d,\varepsilon(v))_{\overline{H}_0}\mid d\in V_0^*,\ d(\cdot)\in\aleph(\cdot,t,\varepsilon(u(\cdot)))\},\quad t\in S,\quad u,v\in V_0,$$

$J\colon[0,T]\times L_2(\Gamma_C;R^d)\times K\to\mathbb{R}$ — функционал, который определяется так:

$$J(t,v,\eta)=\int_{\Gamma_C}(j_N(x,t,v_N(x),\varsigma)+j_T(x,t,v_T(x),\xi))\,d\Gamma(x),$$

для $t \in S$, $v \in L_2(\Gamma_C; R^d)$ и $\eta = (\varsigma, \xi) \in K \subset \widehat{K}$, где $\widehat{K}$ — сопряженное пространство к некоторому рефлексивному или сепарабельному банаховому пространству, K — непустое выпуклое замкнутое множество, а $\overline{\gamma}^*$ — сопряженный оператор к $\overline{\gamma}$. Таким образом, получили задачу относительно изучения функционально-топологических свойств разрешающего оператора $K(\eta, u_1, u_0, f)$ следующей задачи:

$$\begin{cases} u'' + A(u') + Bu + C(u,\eta) \ni f, \\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $K(\eta, u_1, u_0, f) = \{(u, u') \in C(S; V_0) \times W \mid u$ — решение $(2)\}$, производная u' элемента u понимается в смысле пространства распределений $D^*(S; V_0^*)$. Решение задачи (2) такое, что $u \in C(S; V_0)$, $u' \in W \subset C(S; H_0)$ называется обобщенным решением задачи (1).

Следует отметить, что в существующих подходах к исследованию такого рода задач [1, 3, 7] предлагается накладывать достаточно жесткие условия на порождающие отображения, в частности, требуется выполнение условий "$-$"-коэрцитивности, ограниченности и обобщенной псевдомонотонности A. По сравнению с упомянутыми подходами, предложенная в данной работе схема исследования позволяет существенно ослабить вышеуказанные свойства дифференциальных операторов, например, техническое условие равномерной "$-$"-коэрцитивности на "$+$"-коэрцитивность, обобщенной псевдомонотонности на w_{λ_0}-псевдомонотонность и т. п. При таком ослаблении свойств дифференциальных операторов можно исследовать функционально-топологические свойства разрешающего оператора для дифференциально-операторного включения, которые описывают более широкие классы нелинейных процессов и полей. Стоит отметить, что конкретные классы дифференциальных операторов псевдомонотонного типа, возникающих в задаче (1), детально рассмотрены в работах [1–14] (см. также приведенную там библиогр.).

2. Классы многозначных отображений. Пусть Y — некоторое рефлексивное банахово пространство, Y^* — его топологически сопряженное, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y : Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ — спаривание, $A\colon Y \to C_v(Y^*)$ — многозначное отображение с непустыми выпуклыми слабо компактными значениями. Для него определим верхнюю $[A(y), \omega]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \langle d, \omega \rangle_Y$ и нижнюю $[A(y), \omega]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \langle d, \omega \rangle_Y$ опорные функции, где y, $\omega \in Y$, а также верхнюю $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \|d\|_{Y^*}$ и нижнюю $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \|d\|_{Y^*}$ нормы [8, 11]. Пусть $\widehat{W}$ — некоторое нормированное пространство непрерывно вложенное в Y, $\widehat{X}$ — некоторое отделимое ЛТП, $X \subset \widehat{X}$ — некоторое непустое множество. Рассмотрим параметризированное многозначное отображение $A\colon Y \times X \to C_v(Y^*)$.

Определение 1. Многозначное отображение $A\colon Y \times X \to C_v(Y^*)$ называется *демизамкнутым*, если для произвольной последовательности $\{y_n, u_n\}_{n \geqslant 0} \subset Y \times X$ такой, что $y_n \to y$ в Y, $u_n \to u_0$ в $\widehat{X}$, $d_n \xrightarrow{w} d_0$ в Y^*, где $d_n \in A(y_n, u_n)$ $\forall\, n \geqslant 1$, следует, что $d_0 \in A(y_0, u_0)$.

Определение 2. Многозначное отображение $A\colon Y \to C_v(Y^*)$ называется:

λ_0-*псевдомонотонным на* $\widehat{W}$ (w_{λ_0}-псевдомонотонным), если для любой последовательности $\{y_n, d_n\}_{n \geqslant 0} \subset \widehat{W} \times Y^*$ такой, что $d_n \in A(y_n)$ $\forall\, n \geqslant 1$, $y_n \xrightarrow{w} y_0$ в $\widehat{W}$, $d_n \xrightarrow{w} d_0$ в Y^* при $n \to +\infty$, из неравенства $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_Y \leqslant 0$ следует, что существует такая подпоследовательность $\{y_{n_k}, d_{n_k}\}_{k \geqslant 1} \subset \{y_n, d_n\}_{n \geqslant 1}$, что $\varliminf\limits_{k \to \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_Y \geqslant [A(y_0), y_0 - w]$ $\forall\, w \in Y$;

ограниченным, если для каждого $L > 0$ существует такое $l > 0$, что $\|A(y)\|_+ \leqslant l\ \forall\, y \in Y :$ $\|y\|_Y \leqslant L$.

3. Основные результаты. В обозначениях пункта 1 изучим функционально-топологические свойства разрешающего оператора задачи (2).

Теорема 1. *Пусть $A\colon V \to C_v(V^*)$ — λ_0-псевдомонотонное на W ограниченное отображение, $B\colon V \to V^*$ — линейный непрерывный оператор, а мультиотображение $C\colon Z \times \times K \to C_v(Z^*)$ ограниченное и демизамкнутое. Дополнительно рассмотрим последовательность $\{f_m, a_m, b_m, v_m\}_{m\geqslant 1} \subset V^* \times H_0 \times V_0 \times K$. Предположим также, что для всех $m \geqslant 1$ $(y_m, y_m') \in K(v_m, a_m, b_m, f_m)$, $f_m \to f_0$ в V^*, $a_m \to a_0$ в H_0, $b_m \to b_0$ в V_0, $v_m \to v_0$ в $\widehat{K}$, $y_m' \xrightarrow{w} g$ в V, $m \to +\infty$. Тогда существует $y \in C(S; V_0)$ такое, что $y' \in W$, $y' = g$ и $(y, y') \in K(v_0, a_0, b_0, f_0)$. Более того, $y_m \to y$ в $C(S; V_0)$, $y_m' \xrightarrow{w} y'$ в W, $\forall\, t \in S$ $y_m'(t) \xrightarrow{w} y'(t)$ в H_0, $m \to +\infty$.*

Теперь дополнительно предположим, что существуют действительные гильбертовы пространства V_σ, V_{σ_1} такие, что вложения $V_\sigma \subset V_0 \subset V_{\sigma_1} \subset H_0$ непрерывные и плотные [8, 9]. Тогда вложение $V_\sigma \subset H_0$ компактное. Положим $W_\sigma = \{y \in V \mid y' \in L_q(S; V_\sigma^*)\}$, где V_σ^* — топологически сопряженное с V_σ пространство, y' — производная элемента $y \in V$ в смысле $D^*(S; V_\sigma^*)$ [4].

Теорема 2. *Если отображение $A\colon V \to C_v(V^*)$ является λ_0-псевдомонотонным на W_σ,*

$$\exists\, c_1, c_2, c_3 > 0\colon \qquad \forall\, y \in V \qquad [A(y), y]_+ \geqslant c_1\|y\|_V^p - c_2, \qquad \|A(y)\|_+ \leqslant c_3(1 + \|y\|_V^{p-1});$$

отображение $B\colon L_2(S; V_{\sigma_1}) \to L_2(S; V_{\sigma_1}^*)$ удовлетворяет такое свойство:

$$\forall\, u \in V \qquad (Bu)(t) = B_0u(t) \quad \text{для п.в.} \quad t \in S,$$

где $B_0\colon V_{\sigma_1} \to V_{\sigma_1}^*$ — линейный ограниченный самосопряженный монотонный оператор; а отображение $C\colon Z \times K \to C_v(Z^*)$ демизамкнутое и для некоторого $v \in K$

$$\exists\, \varepsilon^* > 0\colon \qquad \forall\, y \in Z \qquad \sup_{d \in C(y,v)} \|d\|_{Z^*} \leqslant (c_1\gamma^{-p}(T-\tau)^{-p/q} - \varepsilon^*)(1 + \|y\|_Z^{p-1}),$$

где $\gamma \equiv \mathrm{const}$ из неравенства $\|\cdot\|_{Z_0} \leqslant \gamma\|\cdot\|_{V_0}$, то для произвольных $f \in V^*$, $a \in H_0$, $b \in V_0$, $K(v, a, b, f) \neq \varnothing$.

Зафиксируем теперь произвольные $f \in V^*$, $a \in H_0$, $b \in V_0$. Положим $G_{ad} = \{(y, y', v) \in \in C(S; V_0) \times W \times K \mid (y, y') \in K(v, a, b, f)\}$.

Теорема 3. *Пусть $L\colon C(S; V_0) \times (W; \sigma(W^*; W)) \times (X; \sigma(X^*; X)) \to \mathbb{R}$ — полунепрерывный снизу функционал такой, что*

$$\forall\, u \in C(S; V_0), \qquad v \in W, \qquad w \in X^* \qquad L(u, v, w) \geqslant \varphi_1(\|v\|_V) + \varphi_2(\|w\|_{X^*}),$$

где $\varphi_i\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такие, что $\varphi_i(s) \to +\infty$, $s \to +\infty$, $i = 1, 2$. Предположим также, что $A\colon V \to C_v(V^*)$, $B\colon V \to V^*$, $C\colon Z \times K \to C_v(Z^*)$ удовлетворяют условиям теорем 1, 2. Тогда задача

$$\begin{cases} L(y, y', v) \to \inf, \\ (y, y', v) \in G_{ad} \end{cases}$$

имеет решение.

1. *Denkowski Z., Migorski S.* Existence of solutions to evolution second order hemivariational inequalities with multivalued damping // System Modeling and Optimization / Ed. by J. Cagnol, J.-P. Zolesio. – Dordrecht: Kluwer, 2005. – P. 203–215.
2. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для еволюційних включень II порядку з w_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями // Укр. мат. журн. – 2009. – № 2. – С. 153–172.
3. *Panagiotopoulos P. D.* Hemivariational inequalities. – New York: Springer, 1993. – 451 p.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 337 с.
5. *Clarke F. H.* Optimization and nonsmooth analysis. – Philadelphia: SIAM, 1990. – 308 p.
6. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 381 с.
7. *Migorski S.* Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications // J. Global Optim. – 2005. – **31**, No 3. – P. 505–533.
8. *Згуровский М. З., Касьянов П. О., Мельник В. С.* Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. – Киев: Наук. думка, 2008. – 464 с.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
10. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Piccirillo A. M.* On some approximations and main topological descriptions for special classes of Banach spaces with integrable derivatives // Meth. Funct. Anal. and Topol. – 2008. – **14**, No 3. – P. 255–270.
11. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и систем. анализ. – 2000. – № 4. – С. 57–69.
12. *Zgurovsky M. Z., Melnik V. S.* Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. – Berlin: Springer, 2004. – 508 p.
13. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
14. *Kapustyan O. V., Mel'nik V. S., Valero J., Yasinsky V. V.* Global attractors for multivalued dynamical systems. – Киев: Наук. думка, 2008. – 208 с.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко
Учебно-научный комплекс “Институт прикладного системного анализа” НТУ Украины “Киевский политехнический институт” МОН Украины и НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 09.10.2009

N. V. Zadoyanchuk, P. O. Kasyanov

The method of investigation of dynamical contact problems with nonlinear damping

We consider a class of dynamical contact problems of nonlinearized viscoelasticity theory which can be reduced to the second-order differential-operator inclusions in special classes of infinite-dimensional spaces. We investigate properties of a resolving operator and obtain new a priori estimations.