УДК 517.96

С. А. Плакса, В. С. Шпаковский

Интегральные теоремы для дифференцируемых функций в трехмерной гармонической алгебре

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины П. М. Тамразовым)

Для моногенних функцій, що набувають значень у тривимірній комутативній гармонічній алгебрі з одиницею та двовимірним радикалом, доведено аналоги класичних інтегральних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної: інтегральні теореми Коші для поверхневого і криволінійного інтегралів, теорема Морера і інтегральна формула Коші.

Пусть $\mathbb{A}_3$ — коммутативная ассоциативная банахова алгебра третьего ранга над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, базис которой состоит из единицы алгебры 1 и элементов ρ_1, ρ_2, для которых выполняются правила умножения: $\rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0$, $\rho_1^2 = \rho_2$. Алгебра $\mathbb{A}_3$ является *гармонической* (см. [1, 2]), поскольку в ней существуют *гармонические* базисы $\{e_1 = 1, e_2, e_3\}$, удовлетворяющие условию

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0, \tag{1}$$

полностью описанные в монографии [2, с. 27].

Выделим в алгебре $\mathbb{A}_3$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, порожденную векторами 1, e_2, e_3. Множеству S трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие множество $S_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 \colon (x, y, z) \in S\}$ в E_3.

Непрерывная функция $\Phi \colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ называется *моногенной* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, т. е. если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}_3$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \qquad \forall h \in E_3.$$

В силу равенств (1) и

$$\triangle_3\Phi := \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Phi''(\zeta)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

каждая дважды дифференцируемая по Гато функция $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, где x, y, $z \in \mathbb{R}$, принимающая значения в алгебре $\mathbb{A}_3$, удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа $\triangle_3\Phi = 0$.

В работе [3] для функций, дифференцируемых по Лорху в выпуклой области произвольной коммутативной ассоциативной банаховой алгебры, установлен ряд свойств, аналогичных свойствам голоморфных функций комплексной переменной (в частности, интегральная теорема и интегральная формула Коши, разложимость в степенной ряд, теорема Морера). В работе [4] в указанных результатах из [3] снято условие выпуклости области определения заданных функций.

Мы установим аналогичные результаты для моногенных функций $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, заданных лишь в области Ω_ζ линейного многообразия E_3, а не всей алгебры $\mathbb{A}_3$, причем предположение о дифференцируемости функции Φ по Гато априори является более слабым ограничением, чем ее дифференцируемость по Лорху. Кроме того, заметим, что для моногенных функций $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, в частности, не имеют места интегральные формулы Коши, установленные в работах [3, 4], поскольку в этих формулах интегрирование ведется по кривым, на которых функция Φ, вообще говоря, не определена.

Отметим, что некоторые гиперкомплексные аналоги теоремы Коши в работах [5, 6] также, как и в [3, 4], установлены для криволинейного интеграла, а в работах [5, 7–9] — для поверхностного интеграла.

Теорема Коши для поверхностного интеграла. В теореме 1.3 из [2] установлены необходимые и достаточные условия моногенности функции $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta$, которые запишем здесь в свернутом виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} e_3. \tag{2}$$

Наряду с моногенными функциями будем рассматривать функции $\Psi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка в области Ω_ζ и в каждой точке этой области удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} e_3 = 0. \tag{3}$$

В научной литературе используются разные названия для функций, удовлетворяющих уравнениям вида (3). Например, в работах [5, 6, 10] их называют регулярными, а в работах [7, 8, 11] — моногенными. Мы, следуя работам [9, 12, 13], функции, удовлетворяющие уравнению (3), будем называть *гиперголоморфными*.

Известно, что в кватернионном анализе классы функций, определяемых условиями вида (2) и (3), не совпадают (см. [5, 14]).

Заметим, что в алгебре $\mathbb{A}_3$ множество моногенных функций является подмножеством множества гиперголоморфных функций, поскольку вследствие соотношений (1), (2) каждая моногенная функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ тождественно удовлетворяет равенству (3). В то же время существуют гиперголоморфные функции, не являющиеся моногенными. Например, функция $\Psi(x + ye_2 + ze_3) = ze_2 - ye_3$ удовлетворяет соотношению (3), но не удовлетворяет равенствам вида (2).

Пусть Ω — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^3$. Определим интеграл от непрерывной на множестве Ω_ζ функции $\Psi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ вида

$$\Psi(x + ye_2 + ze_3) = \sum_{k=1}^{3} U_k(x,y,z) e_k + i \sum_{k=1}^{3} V_k(x,y,z) e_k, \tag{4}$$

где $(x,y,z) \in \Omega$, равенством

$$\int\limits_{\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\, dxdydz := \sum_{k=1}^{3} e_k \int\limits_{\Omega} U_k(x,y,z)\, dxdydz + i \sum_{k=1}^{3} e_k \int\limits_{\Omega} V_k(x,y,z)\, dxdydz.$$

Пусть Σ — квадрируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$, проекции которой на координатные плоскости квадрируемы. Интеграл от непрерывной функции $\Psi\colon \Sigma_\zeta \to \mathbb{A}_3$ вида (4), где $(x,y,z) \in \Sigma$, по поверхности Σ_ζ с дифференциальной формой $\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} := \alpha_1 dydz + \alpha_2 dzdx e_2 + \alpha_3 dxdy e_3$ при $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ определим равенством

$$\int\limits_{\Sigma_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} := \sum_{k=1}^{3} e_k \int\limits_{\Sigma} \alpha_1 U_k(x,y,z)\,dydz + \sum_{k=1}^{3} e_2 e_k \int\limits_{\Sigma} \alpha_2 U_k(x,y,z)\,dzdx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} e_3 e_k \int\limits_{\Sigma} \alpha_3 U_k(x,y,z)\,dxdy + i \sum_{k=1}^{3} e_k \int\limits_{\Sigma} \alpha_1 V_k(x,y,z)\,dydz +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{3} e_2 e_k \int\limits_{\Sigma} \alpha_2 V_k(x,y,z)\,dzdx + i \sum_{k=1}^{3} e_3 e_k \int\limits_{\Sigma} \alpha_3 V_k(x,y,z)\,dxdy.$$

Простой поверхностью называется связный гомеоморфный образ квадрата в $\mathbb{R}^3$. Поверхность в $\mathbb{R}^3$ называют *локально простой*, если она является простой в некоторой окрестности каждой точки.

Если односвязная область Ω пространства $\mathbb{R}^3$ имеет замкнутую локально простую кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$ и функция $\Psi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ является непрерывной вместе с частными производными первого порядка вплоть до границы $\partial\Omega_\zeta$, то справедлив следующий аналог формулы Гаусса–Остроградского:

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma = \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial z} e_3\right) dxdydz, \tag{5}$$

где $\sigma := \sigma_{1,1,1} \equiv dydz + dzdx e_2 + dxdy e_3$.

Формула (5) является непосредственным следствием классической формулы Гаусса–Остроградского.

Теперь следствием формулы (5) и равенства (3) является

Теорема 1. *Пусть односвязная область Ω имеет замкнутую локально простую кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, а функция $\Psi\colon \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{A}_3$ непрерывна в замыкании $\overline{\Omega}_\zeta$ области Ω_ζ и гиперголоморфна в Ω_ζ. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \Psi(\zeta)\sigma = 0.$$

Теорема Коши для криволинейного интеграла. Пусть γ — жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^3$. Определим *интеграл по кривой* γ_ζ от непрерывной функции $\Psi\colon \gamma_\zeta \to \mathbb{A}_3$ вида (4) равенством

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Psi(\zeta)\,d\zeta := \sum_{k=1}^{3} e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)\,dx + \sum_{k=1}^{3} e_2 e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)\,dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} e_3 e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)\,dz + i \sum_{k=1}^{3} e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)\,dx +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{3} e_2 e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)\,dy + i\sum_{k=1}^{3} e_3 e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)\,dz,$$

где $d\zeta := dx + e_2 dy + e_3 dz$.

Если функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ непрерывна вместе с частными производными первого порядка в области Ω_ζ и Σ — произвольная кусочно-гладкая поверхность в Ω со спрямляемым жордановым краем γ, то справедлив следующий аналог формулы Стокса:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}e_2 - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}e_3 - \frac{\partial\Phi}{\partial z}e_2\right)dydz + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}e_3\right)dzdx. \tag{6}$$

Формула (6) является непосредственным следствием классической формулы Стокса.

Теорема 2. *Пусть функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ моногенна в области Ω_ζ и Σ — произвольная кусочно-гладкая поверхность в Ω со спрямляемым жордановым краем γ. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,d\zeta = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Используя формулу (6) и моногенность функции $\Phi(\zeta)$, получаем

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,dx + \Phi(\zeta)e_2 dy + \Phi(\zeta)e_3 dz =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}e_2 - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}e_3 - \frac{\partial\Phi}{\partial z}e_2\right)dydz + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}e_3\right)dzdx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_\zeta} (\Phi'(\zeta)e_2 - \Phi'(\zeta)e_2)\,dxdy + (\Phi'(\zeta)e_2e_3 - \Phi'(\zeta)e_3e_2)\,dydz + (\Phi'(\zeta)e_3 -$$

$$- \Phi'(\zeta)e_3)\,dzdx = 0.$$

Теорема доказана.

Теперь по схеме доказательства теоремы 3.2 из [4] доказывается

Теорема 3. *Пусть в области Ω_ζ определена моногенная функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$. Тогда для любой замкнутой жордановой спрямляемой гомотопной точке кривой γ в Ω справедливо равенство* (7).

Установим достаточные условия на кривую γ_ζ, расположенную на границе области, при которых справедливо равенство (7).

Пусть на границе $\partial\Omega_\zeta$ области Ω_ζ задана замкнутая жорданова спрямляемая кривая $\gamma_\zeta \equiv \gamma_\zeta(t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, которая гомотопна внутренней точке ζ_0 этой области. Это означает, что существует функция $H(s,t)$, непрерывная на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, такая, что $H(0,t) = \gamma_\zeta(t)$, $H(1,t) \equiv \zeta_0$ и все кривые $\gamma_\zeta^s \equiv \gamma_\zeta^s(t) := \{\zeta = H(s,t)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ при $0 < s < 1$ расположены в области Ω_ζ.

Введем также в рассмотрение кривые $\Gamma_\zeta^t \equiv \Gamma_\zeta^t(s) := \{\zeta = H(s,t)\colon 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ и обозначим через $\Gamma[\zeta_1,\zeta_2]$ дугу жордановой ориентированной спрямляемой кривой Γ с началом в точке ζ_1 и концом в точке ζ_2, а через mes — линейную меру Лебега на кривой Γ.

В алгебре $\mathbb{A}_3$ определим евклидову норму $\|a\| := \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}$, где $a = a_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ и $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{C}$.

Теорема 4. *Пусть функция $\Phi\colon \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{A}_3$ непрерывна в замыкании $\overline{\Omega}_\zeta$ области Ω_ζ и моногенна в Ω_ζ. Тогда для любой замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ_ζ, расположенной на границе $\partial\Omega_\zeta$ и гомотопной внутренней точке ζ_0 области Ω_ζ, для которой кривые семейства $\{\Gamma_\zeta^t\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ спрямляемы и множество $\{\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta^s\colon 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ ограничено, справедливо равенство (7).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем число $\rho \in \left(0, \dfrac{1}{2}\,\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta\right)$ такое, что для любых $\zeta_1,\ \zeta_2 \in \overline{\Omega}_\zeta$ из условия $\|\zeta_1 - \zeta_2\| < 2\rho$ следует неравенство $\|\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)\| < \varepsilon$.

Так как функция H равномерно непрерывна на квадрате $[0,1] \times [0,1]$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $s \in (0,\delta)$ и $t,\ t' \in [0,1]\colon |t - t'| < \delta$ выполняется неравенство $|H(0,t) - H(s,t')| < \rho$.

Пусть числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ такие, что для соответствующих точек $\zeta_{0,k} := H(0,t_k)$ кривой γ_ζ выполняются соотношения

$$\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta[\zeta_{0,k},\zeta_{0,k+1}] = \rho \qquad \text{при} \qquad k = \overline{0,n-1}, \qquad \mathrm{mes}\,\gamma_\zeta[\zeta_{0,n},\zeta_{0,0}] \leqslant \rho.$$

Очевидно, что $2 \leqslant n \leqslant \left[\dfrac{\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta}{\rho}\right] + 1$.

Введем в рассмотрение точки $\zeta_{s,k} := H(s,t_k)$ кривой γ_ζ^s и кривые

$$\Upsilon_{[k]}^s := \gamma_\zeta[\zeta_{0,k},\zeta_{0,k+1}] \cup \Gamma_\zeta^{t_{k+1}}[\zeta_{0,k+1},\zeta_{s,k+1}] \bigcup \gamma_\zeta^s[\zeta_{s,k+1},\zeta_{s,k}] \bigcup \Gamma_\zeta^{t_k}[\zeta_{s,k},\zeta_{0,k}]$$

при $k = \overline{0,n}$, где $\zeta_{s,n+1} := \zeta_{s,0}$ при $0 \leqslant s < 1$, полагая при этом, что ориентация кривых $\Upsilon_{[k]}^s$ индуцирована ориентацией кривой γ_ζ.

Пусть $s \in (0,\delta)$. Поскольку при всех $\zeta \in \Upsilon_{[k]}^s$ выполняется неравенство $\|\zeta - \zeta_{0,k}\| \leqslant 2\rho$, то, учитывая теорему 3, получаем

$$\begin{aligned}\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,d\zeta\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\Upsilon_{[k]}^s} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_{0,k}))\,d\zeta\right\| \leqslant 9M\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\Upsilon_{[k]}^s} \|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_{0,k})\|\|d\zeta\| \leqslant \\ &\leqslant 9M\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\mathrm{mes}\,\Upsilon_{[k]}^s \leqslant 9M\varepsilon\Big(\mathrm{mes}\,\gamma_\zeta + \mathrm{mes}\,\gamma_\zeta^s + 2(n+1)\max_{k=\overline{0,n}}\mathrm{mes}\,\Gamma_\zeta^{t_k}[\zeta_{s,k},\zeta_{0,k}]\Big) \leqslant \\ &\leqslant c\varepsilon\left(1 + \frac{1}{\rho}\max_{k=\overline{0,n}}\mathrm{mes}\,\Gamma_\zeta^{t_k}[\zeta_{s,k},\zeta_{0,k}]\right),\end{aligned} \tag{8}$$

где $M := \max\{1, \|e_2^2\|, \|e_2e_3\|, \|e_3^2\|\}$, а постоянная c не зависит от ε и ρ.

Переходя к пределу в неравенстве (8) при $s \to 0$, получаем неравенство

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)\,d\zeta\right\| \leqslant c\varepsilon,$$

переходя в котором, в свою очередь, к пределу при $\varepsilon \to 0$, убеждаемся в справедливости равенства (7). Теорема доказана.

По стандартной схеме (см., например, [15]) доказывается следующая теорема Морера для функций, заданных в алгебре $\mathbb{A}_3$.

Теорема 5. *Если функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ непрерывна в области Ω_ζ и интеграл от нее по границе произвольного треугольника, замыкание которого содержится в Ω_ζ, равен нулю, то функция Φ моногенна в области Ω_ζ.*

Интегральная формула Коши. Поскольку существует изоморфизм между алгебрами моногенных функций $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, определенной в различных гармонических базисах $\{e_1, e_2, e_3\}$, то достаточно изучать свойства моногенных функций со значениями в алгебре $\mathbb{A}_3$, заданных в областях линейной оболочки E_3, порожденной одним из гармонических базисов.

Далее всюду будем рассматривать гармонический базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, разложение элементов которого по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеет вид

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = i + \frac{1}{2} i\rho_2, \qquad e_3 = -\rho_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} i\rho_2.$$

Следствием леммы 1.1 из [2] является равенство

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{x+iy} + \frac{z}{(x+iy)^2}\rho_1 + \left(\frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}z - y}{(x+iy)^2} + \frac{z^2}{(x+iy)^3}\right)\rho_2 \tag{9}$$

для всех $\zeta = x + ye_2 + ze_3 \in E_3 \setminus \{ze_3\colon z \in \mathbb{R}\}$, при этом очевидно, что прямая $\{ze_3\colon z \in \mathbb{R}\}$ содержится в радикале алгебры $\mathbb{A}_3$.

С учетом разложения (9) легко вычисляется интеграл

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_\zeta} \tau^{-1} d\tau = 2\pi i, \tag{10}$$

где $\widetilde{\gamma}_\zeta := \{\tau = x + ye_2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

Теорема 6. *Пусть область Ω является выпуклой в направлении оси Oz и функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ моногенна в области Ω_ζ. Тогда для любой внутренней точки ζ_0 этой области справедливо равенство*

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta, \tag{11}$$

где γ_ζ — любая замкнутая жорданова спрямляемая кривая в Ω_ζ, один раз охватывающая прямую $\{\zeta_0 + ze_3\colon z \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство. Представим интеграл из правой части равенства (11) в виде суммы двух интегралов

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\zeta)(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta = \int\limits_{\gamma_\zeta} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta + \Phi(\zeta_0) \int\limits_{\gamma_\zeta} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta =: I_1 + I_2.$$

Так как кривая γ один раз охватывает ось Oz, то она гомотопна окружности $K(R) := \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2, z = z_0\}$, где $\zeta_0 = x_0 + y_0 e_2 + z_0 e_3$. Тогда, используя равенство (10) при $\tau = \zeta - \zeta_0$, имеем $I_2 = 2\pi i \Phi(\zeta_0)$.

Покажем, что $I_1 = 0$. С этой целью выберем на кривой γ две точки A и B, в которых существуют касательные к γ, а также две точки A_1, B_1 на окружности $K(\varepsilon)$, целиком лежащей в области Ω. Обозначим через γ^1 и γ^2 связные компоненты множества $\gamma \setminus \{A, B\}$. Связные компоненты множества $K(\varepsilon) \setminus \{A_1, B_1\}$ обозначим через K^1, K^2 так, чтобы после выбора гладких дуг Γ^1, Γ^2 каждая из замкнутых кривых $\gamma^1 \bigcup \Gamma^2 \bigcup K^1 \bigcup \Gamma^1$ и $\gamma^2 \bigcup \Gamma^1 \bigcup K^2 \bigcup \Gamma^2$ была гомотопна точке области $\Omega \setminus \{(x_0, y_0, z) \colon z \in \mathbb{R}\}$.

Тогда по теореме 3

$$\int\limits_{\gamma^1_\zeta \cup \Gamma^2_\zeta \cup K^1_\zeta \cup \Gamma^1_\zeta} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma^2_\zeta \cup \Gamma^1_\zeta \cup K^2_\zeta \cup \Gamma^2_\zeta} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta = 0.$$

Поскольку в этих равенствах интегрирование по кривым Γ^1_ζ, Γ^2_ζ осуществляется в противоположных направлениях, то после сложения указанных равенств получим

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta + \int\limits_{K_\zeta(\varepsilon)^-} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta = 0,$$

где через $K_\zeta(\varepsilon)^-$ обозначена окружность $K_\zeta(\varepsilon)$, ориентированная в противоположном относительно кривой γ_ζ направлении. Следовательно, справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta = \int\limits_{K_\zeta(\varepsilon)} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta, \tag{12}$$

в котором ориентации кривых $K_\zeta(\varepsilon)$, γ_ζ совпадают.

Поскольку подинтегральная функция в интеграле из правой части равенства (12) при всех $\zeta \in K_\zeta(\varepsilon)$ ограничена некоторой постоянной c, не зависящей от ε, то

$$\left\| \int\limits_{K_\zeta(\varepsilon)} (\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0))(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta \right\| \leqslant 9Mc \int\limits_{K_\zeta(\varepsilon)} \|d\zeta\| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, $I_1 = 0$ и теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 25.1/084) и Государственной программы Украины № 0107U002027.

1. *Мельниченко И. П.* Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1284–1290.
2. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
3. *Lorch E. R.* The theory of analytic functions in normed Abelean vector rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **54**. – P. 414–425.
4. *Blum E. K.* A theory of analytic functions in Banach algebras // Ibid. – 1955. – **78**. – P. 343–370.
5. *Sudbery A.* Quaternionic analysis // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1979. – **85**. – P. 199–225.

6. *Colombo F., Sabadini I., Struppa D.* Slice monogenic functions // arXiv:0708.3595v2[math.CV] 25 Jan 2008.
7. *Brackx F., Delanghe R.* Duality in hypercomplex functions theory // J. Funct. Anal. – 1980. – **37**, No 2. – P. 164–181.
8. *Bernstein S.* Factorization of the nonlinear Schrödinger equation and applications // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2006. – **51**, No 5–6. – P. 429–452.
9. *Kravchenko V. V., Shapiro M. V.* Integral representations for spatial models of mathematical physics. – Harlow: Longman, 1996. – 247 p.
10. *Sprößig W.* Eigenvalue problems in the framework of Clifford analysis // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2001. – **11**. – P. 301–316.
11. *Ryan J.* Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis // J. Lie Theory. – 1998. – **8**. – P. 67–82.
12. *Sprössig W.* Quaternionic analysis and Maxwell's equations // CUBO A Math. J. – 2005. – **7**, No 2. – P. 57–67.
13. *Schneider B., Karapinar E.* A note on biquaternionic MIT bag model // Int. J. Contemp. Math. Sci. – 2006. – **1**, No 10. – P. 449–461.
14. *Мейлихзон А. С.* По поводу моногенности кватернионов // Докл. АН СССР. – 1948. – **59**, № 3. – С. 431–434.
15. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1977. – 445 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.09.2009

S. A. Plaksa, V. S. Shpakivskyi

Integral theorems for differentiable functions in a three-dimensional harmonic algebra

For monogenic functions taking values in a three-dimensional commutative harmonic algebra with the unity and a two-dimensional radical, we have proved analogs of classical integral theorems of the theory of analytic functions of complex variable: the Cauchy integral theorems for a surface integral and a curvilinear integral, the Morera theorem, and the Cauchy integral formula.