



УДК 393.3

© 2010

И. А. Лоза

## Решение задачи о неосесимметричных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров конечной длины

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Я. М. Григоренко)

*Розглядається задача про власні неосесиметричні коливання порожнистих п'єзокерамічних циліндрів, поляризованих у радіальному напрямі. Після розділення змінних і подання компонентів вектора переміщень у вигляді стоячих хвиль у напрямку кругової координати вихідна тривимірна задача зводиться до двовимірної. Застосування методу сплайн-колокацій за позовжньою координатою дозволяє дану двовимірну задачу звести до граничної задачі в звичайних диференціальних рівняннях. Отримана задача розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрового пошуку. Наведено результати чисельного аналізу частот власних коливань циліндра у широкому спектрі зміни геометричних характеристик.*

Пьезокерамические элементы цилиндрической формы широко используются в акустоэлектронике, в частности, в гидроакустике в качестве активных элементов для излучения и приема акустических волн.

Математические трудности решения краевых задач электроупругости в трехмерной постановке объясняют тот факт, что в научной литературе известны только отдельные работы о колебаниях пьезокерамических цилиндров конечной длины, выполненные в рамках трехмерной теории упругости [1–7]. В работе [5] исследовались осесимметричные колебания пьезокерамического цилиндра конечной длины.

В данной работе для исследования задачи о собственных неосесимметричных колебаниях пьезокерамических цилиндров предлагается эффективная численно-аналитическая методика, основанная на сочетании методов разделения переменных, разложения в ряды Фурье, метода сплайн-коллокаций и метода пошагового поиска.

Рассматривается пьезокерамический полый цилиндр с радиальной поляризацией пьезокерамического материала. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Торцы цилиндра жестко заземлены и свободны от электродов.

Уравнения гармонических колебаний в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0,\end{aligned}\quad (1)$$

уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2)$$

соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho$  — плотность материала;  $\omega$  — круговая частота;  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $D_i$  — компоненты вектора электрической индукции;  $E_i$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\varphi$  — электростатический потенциал;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z, \\ \sigma_{\theta z} &= 2c_{66}\varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_z, \quad \sigma_{r\theta} = 2c_{55}\varepsilon_{r\theta} - e_{15}E_\theta, \\ D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{13}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{33}E_z, \\ D_\theta &= 2e_{15}\varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{11}E_\theta, \quad D_z = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \varepsilon_{11}E_{\theta z}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь  $c_{ij}$  — компоненты тензора модулей упругости;  $e_{ij}$  — компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) задаются следующие.

Поверхности свободны от внешних усилий  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$  и покрыты тонкими электродами, которые закорочены  $\varphi = 0$ .

Торцы цилиндра (при  $z = L/2$ ) жестко заземлены  $\tilde{u}_r = 0$ ;  $\tilde{u}_\theta = 0$ ;  $\tilde{u}_z = 0$  и свободны от электродов  $D_z = 0$ .

Тут  $R_0$  — радиус срединной поверхности цилиндра;  $h$  — половина толщины цилиндра;  $L$  — длина цилиндра.

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнения (1) и (2) и разрешив их относительно  $\partial^2 u_r / \partial r^2$ ,  $\partial^2 u_\theta / \partial r^2$ ,  $\partial^2 u_z / \partial r^2$ ,  $\partial^2 \varphi / \partial r^2$ , получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \left( \frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \left( 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\Delta_7}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\Delta_9}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\Delta_8}{\Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\
\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} \right) u_\theta - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \\
&- \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}, \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} u_z - \\
&- \frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \left( \frac{\tilde{c}_{11}}{r^2} - \Omega^2 \right) u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\tilde{c}_{33} \tilde{\varepsilon}_{13}}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{\Delta_5}{\Delta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \tilde{c}_{55} \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{e}_{33}^2, & \Delta_1 &= \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15} - \tilde{c}_{55} \tilde{e}_{33}, & \Delta_2 &= \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{15} - (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33}, \\
\Delta_3 &= \tilde{c}_{33} (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) - (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33}, & \Delta_4 &= (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}) \tilde{e}_{33} + \tilde{c}_{33} \tilde{e}_{13}, \\
\Delta_5 &= \tilde{c}_{33} \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{e}_{15} \tilde{\varepsilon}_{33}, & \Delta_6 &= \tilde{c}_{55} \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{\varepsilon}_{33}, & \Delta_7 &= (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{15} \tilde{\varepsilon}_{33}, \\
\Delta_8 &= (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \tilde{e}_{33} + (\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}) \tilde{e}_{33}, & \Delta_9 &= (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{13}) \tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{13} \tilde{e}_{33}, \\
\Delta_{10} &= \tilde{e}_{33} \tilde{\varepsilon}_{11} - \tilde{e}_{15} \tilde{\varepsilon}_{33},
\end{aligned} \tag{6}$$

а также безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \tag{7}$$

где  $\omega$  — круговая частота;  $\lambda = 10^{10}$  Па;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Учитывая замкнутость цилиндрического тела в направлении окружной координаты, компоненты вектора смещений и электростатический потенциал можно представить в виде стоячей волны в окружном направлении:

$$\begin{aligned}
u_r &= h u_1(r, z) \cos m\theta, & u_\theta &= h u_2(r, z) \sin m\theta, & u_z &= h u_3(r, z) \cos m\theta, \\
\varphi &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} u_4(r, z) \cos m\theta.
\end{aligned} \tag{8}$$

Далее используем метод разделения переменных — функции  $u_1(r, z)$ ,  $u_2(r, z)$ ,  $u_3(r, z)$ ,  $u_4(r, z)$  ищем в виде:

$$\begin{aligned} u_1(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_1(x) \varphi_{1i}(z), & u_2(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_2(x) \varphi_{1i}(z), \\ u_3(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_3(x) \varphi_{2i}(z), & u_4(r, z) &= \sum_{i=0}^N v_4(x) \varphi_{2i}(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $x = (r - R_0)/h$ ,  $v_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — искомые функции по переменной  $x$ ,  $\varphi_{ji}(z)$  ( $j = \overline{1, 2}$ ;  $i = \overline{0, 1, \dots, N}$ ) — линейные комбинации  $B$ -сплайнов на равномерной сетке  $\Delta$ ;  $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$ . Принимая во внимание граничные условия на торцах цилиндра при  $z = -L/2$  и  $z = L/2$ , можно заметить, что в систему входят производные от компонент вектора решения не выше второго порядка, следовательно, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьего порядка.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_j &= [\varphi_{ji}(\xi_k)], & v_n &= [u_{n0}, u_{n1}, \dots, u_{nN}]^T, \\ \bar{a}_{kl}^T &= \{a_{kl}(x, \xi_0, \Omega^2), a_{kl}(x, \xi_1, \Omega^2), \dots, a_{kl}(x, \xi_N, \Omega^2)\}, \\ k, i &= \overline{0, N}, & j &= \overline{1, 2}, & (k, l) &\in \{(k, l) \mid k, l = \overline{1, 6}, n = \overline{1, 4}\}, \end{aligned} \quad (10)$$

система (5) превратится в систему  $8(N + 1)$  линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $v_i, \tilde{v}_i$   $i = \overline{1, 4}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dx} &= \tilde{v}_i \quad (i = \overline{1, 4}), \\ \frac{d\tilde{v}_1}{dx} &= \Phi_1^{-1} [(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1'')v_1 + a_{13}\Phi_1\tilde{v}_1 + a_{14}\Phi_2v_2 + a_{15}\Phi_2\tilde{v}_2 + a_{16}\Phi_1'v_3 + \\ &\quad + a_{17}\Phi_1'\tilde{v}_3 + (a_{18}\Phi_1 + a_{19}\Phi_1'')v_4 + \bar{a}_{110}\Phi_1\tilde{v}_4], \\ \frac{d\tilde{v}_2}{dx} &= \Phi_2^{-1} [a_{21}\Phi_1v_1 + a_{22}\Phi_1\tilde{v}_1 + (a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2'')v_2 + a_{25}\Phi_2v_2 + a_{26}\Phi_1'v_3 + \\ &\quad + a_{27}\Phi_1v_4 + a_{28}\Phi_1\tilde{v}_4], \\ \frac{d\tilde{v}_3}{dx} &= \Phi_1^{-1} [a_{31}\Phi_1'v_1 + a_{32}\Phi_1'\tilde{v}_1 + a_{33}\Phi_2'v_2 + (a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1'')v_3 + a_{36}\Phi_1\tilde{v}_3 + \\ &\quad + a_{37}\Phi_1'v_4 + a_{38}\Phi_1'\tilde{v}_4], \\ \frac{d\tilde{v}_4}{dx} &= \Phi_1^{-1} [(a_{41}\Phi_1 + a_{42}\Phi_1'')v_1 + a_{43}\Phi_2\tilde{v}_1 + a_{44}\Phi_2v_2 + a_{45}\Phi_2\tilde{v}_2 + a_{46}\Phi_1'v_3 + \\ &\quad + a_{47}\Phi_1\tilde{v}_3 + (a_{48}\Phi_1 + a_{49}\Phi_1'')v_4 + a_{410}\Phi_1\tilde{v}_4]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$a_{11} = \left( \frac{m^2 \Delta_6 + \tilde{c}_{11} \tilde{\varepsilon}_{33}}{x^2} - \tilde{\varepsilon}_{33} \Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}, \quad a_{12} = -\frac{\Delta_6}{\Delta}, \quad a_{13} = -\left( 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{13} \tilde{\varepsilon}_{33}}{\Delta} \right) \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= \frac{m\Delta_7}{x^2\Delta}, & a_{15} &= \frac{m\Delta_8}{x\Delta}, & a_{16} &= \frac{\Delta_9}{x\Delta}, & a_{17} &= \frac{\Delta_8}{\Delta}, & a_{18} &= -\frac{m^2\Delta_{10}}{x^2\Delta}, \\
a_{19} &= \frac{\Delta_{10}}{\Delta}, & a_{110} &= \frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}, & a_{21} &= \frac{\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x^2}, & a_{22} &= \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x}, \\
a_{23} &= \left( \frac{m^2\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}}, & a_{24} &= -\frac{\tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}}, & a_{25} &= -\frac{1}{x}, & a_{26} &= \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11}} \frac{m}{x}, \\
a_{27} &= \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x^2}, & a_{28} &= \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x}, & a_{31} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}, & a_{32} &= -\frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}}, \\
a_{33} &= -\frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{55}} \frac{m}{x}, & a_{34} &= \left( \frac{m^2\tilde{c}_{66}}{x^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{\tilde{c}_{55}}, & a_{35} &= -\frac{\tilde{c}_{11}}{\tilde{c}_{55}}, & a_{36} &= -\frac{1}{x}, \\
a_{37} &= -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}} \frac{1}{x}, & a_{38} &= -\frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}, & a_{41} &= \left( \frac{\tilde{c}_{11}\tilde{e}_{33} - m^2\Delta_1}{x^2} - \tilde{e}_{33}\Omega^2 \right) \frac{1}{\Delta}, \\
a_{42} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, & a_{43} &= \frac{\tilde{e}_{33}\tilde{c}_{33}}{\Delta} \frac{1}{x}, & a_{44} &= -\frac{m\Delta_2}{x^2\Delta}, & a_{45} &= \frac{m\Delta_3}{x\Delta}, & a_{46} &= \frac{\Delta_4}{x\Delta}, \\
a_{47} &= \frac{\Delta_3}{\Delta}, & a_{48} &= \frac{m^2\Delta_5}{x^2\Delta}, & a_{49} &= -\frac{\Delta_5}{\Delta}, & a_{410} &= \left( \frac{\tilde{e}_{13}\tilde{e}_{33}}{\Delta} - 1 \right) \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Эту систему можно привести к виду:

$$\frac{d\bar{R}}{dx} = A(x, \Omega)\bar{R}. \tag{12}$$

Вектор  $\bar{R} = \{v_1, \tilde{v}_1, v_2, \tilde{v}_2, v_3, \tilde{v}_3, v_4, \tilde{v}_4, \}$ , а ненулевые элементы матрицы  $A$  равны:

$$\begin{aligned}
A_{12} &= 1, & A_{21} &= \Phi_1^{-1}(a_{11}\Phi_1 + a_{12}\Phi_1''), & A_{22} &= \Phi_1^{-1}a_{13}\Phi_1, & A_{23} &= \Phi_1^{-1}a_{14}\Phi_2, \\
A_{24} &= \Phi_1^{-1}a_{15}\Phi_2, & A_{25} &= \Phi_1^{-1}a_{16}\Phi_1', & A_{26} &= \Phi_1^{-1}a_{17}\Phi_1', \\
A_{27} &= \Phi_1^{-1}(a_{18}\Phi_1 + a_{19}\Phi_1''), & A_{28} &= \Phi_1^{-1}a_{110}\Phi_1, & A_{34} &= 1, & A_{41} &= \Phi_2^{-1}a_{21}\Phi_1, \\
A_{42} &= \Phi_2^{-1}a_{22}\Phi_1, & A_{43} &= \Phi_2^{-1}(a_{23}\Phi_2 + a_{24}\Phi_2''), & A_{44} &= \Phi_2^{-1}a_{23}\Phi_2', \\
A_{45} &= \Phi_2^{-1}a_{26}\Phi_1', & A_{47} &= \Phi_2^{-1}a_{27}\Phi_1, & A_{48} &= \Phi_2^{-1}a_{28}\Phi_1, & A_{55} &= 1, \\
A_{61} &= \Phi_1^{-1}a_{31}\Phi_1', & A_{62} &= \Phi_1^{-1}a_{32}\Phi_1', & A_{63} &= \Phi_1^{-1}a_{33}\Phi_2', \\
A_{65} &= \Phi_1^{-1}(a_{34}\Phi_1 + a_{35}\Phi_1''), & A_{66} &= \Phi_1^{-1}a_{36}\Phi_1, & A_{67} &= \Phi_1^{-1}a_{37}\Phi_1', \\
A_{68} &= \Phi_1^{-1}a_{38}\Phi_1', & A_{76} &= 1, & A_{81} &= \Phi_1^{-1}(a_{41}\Phi_2 + a_{42}\Phi_2''), & A_{82} &= \Phi_1^{-1}a_{43}\Phi_1, \\
A_{83} &= \Phi_1^{-1}a_{44}\Phi_2, & A_{84} &= \Phi_2^{-1}a_{45}\Phi_2, & A_{85} &= \Phi_1^{-1}a_{46}\Phi_1', & A_{86} &= \Phi_1^{-1}a_{47}\Phi_1', \\
A_{87} &= \Phi_1^{-1}(a_{48}\Phi_1 + a_{49}\Phi_1''), & A_{88} &= \Phi_1^{-1}a_{410}\Phi_1.
\end{aligned}$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$B_1\bar{R}(-1) = 0, \quad B_2\bar{R}(1) = 0.$$

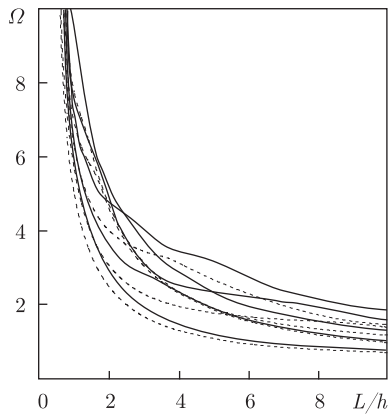


Рис. 1

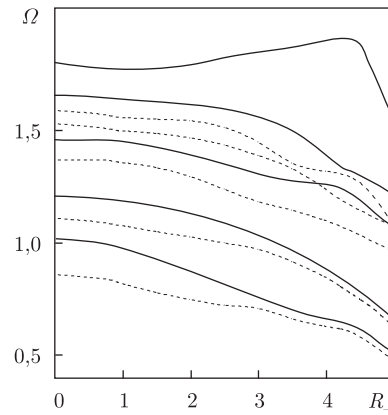


Рис. 2

Результаты численного анализа приведены на рис. 1 и рис. 2. В качестве материала цилиндра рассматривалась пьезокерамика PZT 4. На рис. 1 представлена зависимость первых пяти частот собственных колебаний от относительной длины цилиндра  $L/h$  ( $R_+ = 5$ ;  $R_- = 3$ ). Здесь  $R_+$  — внешний радиус цилиндра;  $R_-$  — внутренний. Сплошными линиями изображены значения собственных частот с учетом пьезоэффекта, штриховыми — без учета ( $e_{ij} = 0$ ). Из рисунка видно, что влияние пьезоэффекта приводит к “ужесточению” материала, т. е. повышению значения собственных частот. При этом при определении первой и второй собственных частот влиянием пьезоэффекта можно пренебречь вплоть до относительной длины ( $L > 5$ ). Для более высоких частот это влияние заметно для более длинных цилиндров.

На рис. 2 представлена зависимость первых пяти собственных частот от внутреннего диаметра цилиндра ( $R_-$ ), при этом длина цилиндра ( $L = 10$ ) и внешний диаметр ( $R_+ = 5$ ) остаются фиксированными. Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне от 0,05 до 4,95 безразмерных единиц. То есть от практически сплошного цилиндра до тонкой цилиндрической оболочки. Анализ приведенного рисунка показывает, что при увеличении толщины цилиндра происходит увеличение собственных частот колебаний. Причем можно отметить, что для первых четырех частот при увеличении толщины цилиндра происходит возрастание собственной частоты колебаний. Для пятой собственной частоты после резкого роста частоты с увеличением толщины затем происходит ее плавное снижение, чего не наблюдается при увеличении относительной длины цилиндра (рис. 1). С ростом относительной длины цилиндра собственная частота колебаний всегда спадает. Влияние пьезоэффекта для собственных частот проявляется даже для достаточно тонких цилиндров.

1. Лазуткин В. Н., Михайлов А. И. Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте // Акуст. журн. — 1976. — **22**, вып. 3. — С. 393–399.
2. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные электроупругие волны в полном пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. — 1984. — **20**, № 1. — С. 26–32.
3. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении // Там же. — 1990. — **25**, № 10. — С. 41–47.
4. Шульга Н. А., Борисенко Л. В. Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями // Там же. — 1990. — **26**, № 1. — С. 43–47.

5. Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Лоза І. А. Розв'язання осесиметричної задачі про вільні коливання п'єзокерамічних порожнистих циліндрів скінченної довжини методом сплайн-колокацій // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 112–119.
6. Kharouf N., Heyliger P. R. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // *J. of Sound and Vibration.* – 1994. – **174**, iss. 4. – P. 539–561.
7. Hussein M., Heyliger P. R. Discrete layer analysis of axisymmetric vibrations of laminated piezoelectric cylinders // *Ibid.* – 1996. – **192**, iss. 5. – P. 995–1013.

Національний транспортний університет, Київ

Поступило в редакцію 10.11.2009

**I. A. Loza**

### **The solution of the problem on non-axisymmetric vibrations of hollow piezoceramic cylinders with finite length**

*The problem on non-axisymmetric vibrations of a hollow piezoceramic cylinder polarized in the radial direction is considered. The initial three-dimensional problem is reduced to a two-dimensional one by the separation of variables and the presentation of the displacement vector components as standing waves in the circumferential direction. Using the method of spline-collocations on the longitudinal coordinate allows us to reduce the two-dimensional boundary-valued problem to that with ordinary differential equations. The problem obtained is solved by the stable discrete orthogonalization coupled with the step-by-step search method. The numerical results are presented for natural frequencies of vibrations in a wide range of the cylinder geometric characteristics.*