УДК 539.3:537.228.1:538.6

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга**

Про товщинні пружноелектричні коливання п'єзокерамічних шарів з викривленими граничними поверхнями

Рівняння пружноелектричних центральносиметричних коливань у сферичних координатах наведені в операторній гамільтоновій формі за радіальною координатою. Використовується єдина форма співвідношень для сферичних, циліндричних і прямокутних координат.

В роботах автора [1–3 та ін.] система рівнянь пружності і електропружності в декартових прямокутних координатах приводиться до операторної системи гамільтонового типу за просторовою координатою відносно відповідним чином вибраних умовно кажучи канонічних змінних. Для системи рівнянь електропружності в циліндричних координатах гамільтонів формалізм вперше був реалізований у [4, 5 та ін.]. У даній роботі аналогічний результат одержано для рівнянь електропружності в сферичних координатах при центрально-симетричних деформаціях.

Будемо виходити з системи одновимірних рівнянь електропружності

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{N}{r} D_r = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

та матеріальних залежностей

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = c_{33}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + N c_{13}^E \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r},\\
&\sigma_{\theta\theta} = c_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + N \left[c_{11}^E - \frac{1}{2}(N-1)(c_{11}^E - c_{12}^E) \right] \frac{u_r}{r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r},\\
&D_r = -\varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} + N e_{31} \frac{u_r}{r} + e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{2}$$

У виразах (2) враховані формули Коші для деформацій $2\mathbf{K} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla$ і градієнтний розв'язок $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ рівняння $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ для напруженості електричного поля в квазістатичному наближенні [6, 7]. Як і в пружному випадку [8] при $N = 0$, $r = z$ рівняння (1), (2) відповідають прямокутним декартовим координатам, при $N = 1$ — циліндричним координатам, при $N = 2$ — сферичним координатам.

З першого і третього рівнянь системи (2) знаходимо

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{33*}} \sigma_{rr} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}} D_r - N \frac{c_{13*}}{c_{33*}} \frac{u_r}{r},\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}} \sigma_{rr} - \frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}} D_r + N \frac{e_{31*}}{\varepsilon_{33*}} \frac{u_r}{r}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут використані позначення

$$
\begin{aligned}
&c_{13*} = c_{13}^E + \frac{e_{13}e_{33}}{\varepsilon_{33}^S}, \qquad c_{33*} = c_{33}^E + \frac{e_{33}e_{33}}{\varepsilon_{33}^S},\\
&e_{13*} = e_{13} - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}^E}, \qquad \varepsilon_{33*} = \varepsilon_{33}^S + \frac{e_{33}e_{33}}{c_{33}^E}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Для напруження $\sigma_{\theta\theta}$ одержимо формулу

$$
\sigma_{\theta\theta} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\sigma_{rr} - \frac{e_{31*}}{\varepsilon_{33*}}D_r + N\left[e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} - c_{13}^E\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + c_{11}^E - \frac{N-1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)\right]\frac{u_r}{r}. \tag{5}
$$

Шляхом подальших перетворень залежностей (1) разом з (3) одержимо систему чотирьох рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial r^N\sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}}\frac{N}{r}r^N\sigma_{rr} - \frac{e_{31*}}{\varepsilon_{33*}}\frac{N}{r}r^ND_r + \\
&\qquad + r^N\left[\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2}\left(e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} - c_{13}^E\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + c_{11}^E - \frac{N-1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)\right)u_r\right],\\
&\frac{\partial r^ND_r}{\partial r} = 0,\\
&\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{33*}r^N}r^N\sigma_{rr} + -\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}r^N}r^ND_r - \frac{c_{31*}N}{c_{33*}r}u_r,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}r^N}r^N\sigma_{rr} - \frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}r^N}r^ND_r + \frac{e_{31*}N}{\varepsilon_{33*}r}u_r.
\end{aligned} \tag{6}
$$

відносно функцій $r^N\sigma_{rr}$, r^ND_r, u_r, φ.

Після їх визначення напруження $\sigma_{\theta\theta}$ знаходимо за формулою (5).

Якщо ввести канонічні змінні $r^N\sigma_{rr} = \widehat{q}_1$, $r^ND_r = \widehat{q}_2$, $u_r = \widehat{p}_1$, $\varphi = \widehat{p}_2$, то систему (6) можна записати в операторній гамільтоновій формі [9] за просторовою координатою r

$$
\frac{\partial\widehat{q}_i}{\partial r} = \frac{\partial\widehat{H}}{\partial\widehat{p}_i}, \qquad \frac{\partial\widehat{p}_i}{\partial r} = -\frac{\partial\widehat{H}}{\partial\widehat{q}_i} \tag{7}
$$

з операторною функцією Гамільтона

$$
\begin{aligned}
&\widehat{H}(\widehat{q}_k,\widehat{p}_k) = -\frac{1}{2}\frac{1}{c_{33*}r^N}\widehat{q}_1^2 - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}}\widehat{q}_1\widehat{q}_2 + \frac{1}{2}\frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}r^N}\widehat{q}_2^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}r^N\left\{\rho\partial_t^2 + \frac{N^2}{r^2}\left[e_{13}\frac{e_{13*}}{c_{33*}} - c_{13}^E\frac{c_{13*}}{c_{33*}} + c_{11}^E - \frac{N-1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)\right]\right\}\widehat{p}_1^2 + \\
&\qquad + \frac{c_{13*}N}{c_{33*}r}\widehat{q}_1\widehat{p}_1 - \frac{e_{13*}N}{\varepsilon_{33*}r}\widehat{q}_2\widehat{p}_1.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Система (6) має ту особливість, що узагальнений імпульс $\widehat{p}_2 = \varphi$ не входить в функцію Гамільтона і похідна від відповідної узагальненої координати $\widehat{q}_2 = r^ND_r$ дорівнює нулю.

Звідси випливає: функція rD_r залежить тільки від часу, перше і третє рівняння інтегруються незалежно від інших; потенціал φ визначається через rD_r та u_r.

Звичайно, рівняння системи (6) можуть бути зв'язані через граничні умови на поверхнях $r = r_0$ та $r = r_1$, $r_0 < r_1$, які вибираються по дві з альтернативних пар

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}(r_0, t) = \overset{0}{\sigma}_{rr}(t) \vee u_r(r_0, t) = \underset{r}{\overset{0}{u}}(t),\\
&\sigma_{rr}(r_1, t) = \overset{1}{\sigma}_{rr}(t) \vee u_r(r_1, t) = \underset{r}{\overset{1}{u}}(t);\\
&D_r(r_0, t) = \underset{r}{\overset{0}{D}}(t) \vee \varphi(r_0, t) = \overset{0}{\varphi}(t),\\
&D_r(r_1, t) = \underset{r}{\overset{1}{D}}(t) \vee \varphi(r_1, t) = \overset{1}{\varphi}(t)
\end{aligned} \tag{9}$$

при $r = r_0$ і $r = r_1$.

Звернемо також увагу на те, що система (6), як і вихідні співвідношення (1), (2), справедливі і у випадку, коли фізико-механічні параметри ρ, c_{ij}, e_{ij}, ε_{ij} будуть кусково-неперервними функціями координати r з розривами першого роду. В точках розриву $r = r_*$, $r_0 < r_* < r_1$ повинні виконуватися умови неперервності функцій σ_{rr}, D_r, u_r, φ.

Розглянемо гармонічні коливання $f(r, t) = \operatorname{Re} f^a(r) \exp i\omega t$. Рівняння (6) в цьому разі набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r^N \sigma_{rr}^a}{\partial r} = \frac{c_{13*}}{c_{33*}} \frac{N}{r} r^N \sigma_{rr}^a - \frac{e_{31*}}{\varepsilon_{33*}} \frac{N}{r} r^N D_r^a +\\
&\qquad + r^N \left[-\rho\omega^2 + \frac{N^2}{r^2}\left(e_{13}\frac{e_{13*}}{\varepsilon_{33*}} - c_{13}^E \frac{c_{13*}}{c_{33*}} + c_{11}^E - \frac{N-1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)\right)\right] u_r^a,\\
&\frac{\partial r^N D_r^a}{\partial r} = 0,\\
&\frac{\partial u_r^a}{\partial r} = \frac{1}{c_{33*} r^N} r^N \sigma_{rr}^a - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*} r^N} r^N D_r^a - \frac{c_{31*} N}{c_{33*} r} u_r^a,\\
&\frac{\partial \varphi^a}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*} r^N} r^N \sigma_{rr}^a - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*} r^N} r^N D_r^a + \frac{e_{31*} N}{\varepsilon_{33*} r} u_r^a.
\end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) є гамільтоновою системою [8] за координатою r

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{11}$$

Функція Гамільтона буде така:

$$\begin{aligned}
H(q_k, p_k) = &-\frac{1}{2}\frac{1}{c_{33*} r^N} q_1^2 - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}} q_1 q_2 + \frac{1}{2}\frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33*} r^N} q_2^2 +\\
&+ \frac{1}{2} r^N \left\{-\rho\omega^2 + \frac{N^2}{r^2}\left[e_{13}\frac{e_{13*}}{c_{33*}} - c_{13}^E \frac{c_{13*}}{c_{33*}} + c_{11}^E - \frac{N-1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)\right]\right\} p_1^2 +\\
&+ \frac{c_{13*} N}{c_{33*} r} q_1 p_1 - \frac{e_{13*} N}{\varepsilon_{33*} r} q_2 p_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Систему рівнянь (10) можна одержати з умови стаціонарності функціонала

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \left[p_1 \frac{dq_1}{dr} + p_2 \frac{dq_2}{dr} + \frac{1}{2} \frac{1}{c_{33*} r^N} q_1^2 + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33*}} q_1 q_2 - \frac{1}{2} \frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33*} r^N} q_2^2 - \right.$$

$$- \frac{1}{2} r^N \left\{ -\rho\omega^2 + \frac{N^2}{r^2} \left[e_{13} \frac{e_{13*}}{c_{33*}} - c_{13}^E \frac{c_{13*}}{c_{33*}} + c_{11}^E - \frac{N-1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \right] \right\} p_1^2 -$$

$$\left. - \frac{c_{13*} N}{c_{33*} r} q_1 p_1 + \frac{e_{13*} N}{\varepsilon_{33*} r} q_2 p_1 \right] dr \qquad (13)$$

при "ізохронних" варіаціях.

Для аналізу резонансних усталених коливань в системі (10) треба скористатися комплексними фізико-механічними параметрами [6, 7].

1. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
2. *Shulga N. A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No 7. – P. 763–796.
3. *Shulga N. A.* Propagation of coupled waves in layered-periodic continua for interaction with an electromagnetic field // Ibid. – 2003. – **39**, No 10. – P. 1146–1172.
4. *Шульга В. М.* До розв'язку рівнянь електропружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1999. – № 3. – С. 71–74.
5. *Шульга В. М.* Поширення акустоелектричних хвиль в п'єзоелектричних циліндрах. – Автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 1999. – 16 с.
6. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
7. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 270 с.
8. *Шульга М. О.* До теорії товщинних коливань пружних шарів з викривленими граничними поверхнями // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 72–75.
9. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики. В 2-х т. – Москва: Наука, 1977. – Т. 2. – 439 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 06.10.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shulga**

About thickness elastic electric vibrations of piezoceramic layers with curved boundary surfaces

Equations of elastic electric centrally symmetric vibrations in spherical coordinates are represented in an operator Hamilton form by the radial coordinate. The single form of relations for spherical, cylindrical, and rectangular coordinates is used.