ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2010

УДК 519.217,519.718

І. В. Малик

Характеристичний показник розв'язку детермінованого диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу в скалярному випадку

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Одержано критерій для визначення характеристичного показника розв'язку детерміно-ваного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу.

Розглянемо функцію, що задовольняє детерміноване диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу (НДДФР) [1]

$$dDy_t = Ly_t dt \tag{1}$$

та початкову умову

$$y_0 = \varphi, \tag{2}$$

де для $\forall \psi \in C([-h,0])$ визначені функціонали

$$D\psi \equiv \int_{-h}^{0} dr_1(s)\psi(s); \qquad L\psi \equiv \int_{-h}^{0} dr_2(s)\psi(s). \tag{3}$$

Тут $\varphi \in C([-h,0])$, r_i, $i = 1, 2$, — функції обмеженої варіації на відрізку $[-h, 0]$, причому

$$r_1(0) - r_1(0-) = 1, \qquad \mathrm{Var}_{[-h,0)} r_1 < 1.$$

Поряд з рівнянням (1) на ймовірнісному базисі [2] $(\Omega, F, P, \Im)$, де $\Im \equiv \{F_t := \sigma(w(s), s \leqslant t), t \geqslant 0\}$ — натуральна фільтрація, $F\colon = \lim\limits_{t\to\infty} F_t$, задано випадковий процес $x(t)$, який задовольняє стохастичне диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу (НСДФР)

$$dDx_t = Lx_t dt + \varepsilon x(t) dw(t) \tag{4}$$

та початкову умову

$$x_0 = \varphi. \tag{5}$$

Тут випадковий процес $x(t) = x(t,\omega)\colon R_+ \times \Omega \longrightarrow R^1$; $x_t \equiv \{x(t+s), -h \leqslant s \leqslant 0 \in C([-h,0])$; $\varphi \in C([-h,0])$; $w(t) = w(t,\omega)$ — одновимірний випадковий вінеровий процес, що узгоджений з $\Im$.

Для задач (1), (2) та (4), (5) мають місце теореми існування та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності (задача (4), (5)) сильних розв'язків $y \in R^1$, $x \in R^1$.

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [2] як розв'язок (1), що задовольняє початкову умову

$$X(t) \equiv \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Зауважимо, що вірне твердження щодо зображення функції Коші $X(t)$ за допомогою характеристичного квазіполінома.

Лема 1 [1]. *Функція Коші $X(t)$ має вигляд*

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} z=\mu} e^{zt} V^{-1}(z)\, dz, \tag{7}$$

де $\mu > -\rho$, $V(z)$ — характеристичний квазіполіном рівняння (1), *який задається співвідношенням*

$$V(z) := z\left\{\int\limits_{-h}^{\varepsilon} dr_1(s) e^{zs}\right\} - \int\limits_{-h}^{\varepsilon} dr_2(s) e^{zs}. \tag{8}$$

Лема 2 [3]. *Розв'язок НДДФР* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$y(t) = x(t) - \varepsilon \int\limits_0^t X(t-s) x(s)\, dw(s), \tag{9}$$

де $x(t)$ — розв'язок задачі (4), (5).

Задача даної роботи полягає у знаходженні характеристичного показника Ляпунова [4] для рівняння (1), який визначається таким чином:

$$k(0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |y(t)|^2}{t}. \tag{10}$$

Визначимо характеристичний показник рівняння (4)

$$k(\varepsilon) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|x(t)|^2}{t}. \tag{11}$$

Теорема 1 [3]. *Характеристичний показник $k(\varepsilon)$ задачі* (4), (5) *визначається з умови*

$$B_{k(\varepsilon)} = 1,$$

де

$$B_{k(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2}{\pi} \int\limits_0^\infty |V_{k(\varepsilon)}(is)|^{-2} ds,$$
$$V_{k(\varepsilon)}(z) \equiv z \int\limits_{-h}^{\epsilon} dr_1(s) e^{-s(z+k(\varepsilon))} - \int\limits_{-h}^{\epsilon} d(r_1(s) - k(\varepsilon) r_1(s)) e^{-s(z+k(\varepsilon))}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Характеристичний показник* $k(0)$ *рівняння* (1) *визначається з умови*

$$r(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(\varepsilon). \tag{13}$$

Доведення. Обчислимо $r(\varepsilon)$:

$$r(\varepsilon) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|x(t)|^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln\left(y^2(t) + \varepsilon^2 \int\limits_0^t X^2(t-s) E x^2(s)\, ds\right)}{t}.$$

Припустимо, що розв'язки $X(t)$ та $x(t)$ експоненційно стійкі (для $x(t)$ мається на увазі стійкість в $l.i.m.$). Тоді

$$r(0) \leqslant r(\varepsilon) \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln(y^2(t) + \varepsilon^2 K)}{t},$$

де $0 < K < \infty$. За припущенням вираз $y^2(t) + \varepsilon^2 K$ рівномірно обмежений за t, тому справедливе твердження теореми 2.

Нехай $X(t)$ або $x(t)$ нестійкі. Утворимо функцію $y^{(p)}(t)$ та випадковий процес $x^{(p)}(t)$, які визначаються рівностями

$$y(t) := e^{pt} y^{(p)}(t);$$
$$x(t) := e^{pt} x^{(p)}(t),$$

де $p > 0$ — досить велике число.

Неважко переконатися [3], що $y^{(p)}(t)$ буде задовольняти НДДФР

$$dD_p y_t^{(p)} = L_p y_t^{(p)} dt, \tag{14}$$

а випадковий процес $x^{(p)}(t)$ — НСДФР

$$dD_p x_t^{(p)} = L_p x_t^{(p)} dt + \varepsilon x^{(p)}(t) dw(t), \tag{15}$$

де функціонали D_p, L_p задаються рівностями

$$D_p \psi := \int\limits_{-h}^{\varepsilon} \psi(s) e^{ps} dr_1(s);$$

$$L_p\psi := \int_{-h}^{\varepsilon} \psi(s)e^{ps} d(r_2(s) - pr_1(s)).$$

Знайдемо таке $p > 0$, що $k^{(p)}(0) < 0$ та $k^{(p)}(\varepsilon) < 0$. Тоді матиме місце рівність

$$r^{(p)}(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} r^{(p)}(\varepsilon),$$

де $r^{(p)}(0)$ — характеристичний показник функції $y^{(p)}(t)$; $r^{(p)}(\varepsilon)$ — характеристичний показник випадкового процесу $x^{(p)}(t)$:

$$k^{(p)}(0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |y^{(p)}(t)|^2}{t}, \tag{16}$$

$$k^{(p)}(\varepsilon) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|x^{(p)}(t)|^2}{t}. \tag{17}$$

Але

$$k(0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |y(t)|^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |e^{pt} y^{(p)}(t)|^2}{t} = 2p + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |y^{(p)}(t)|^2}{t} = 2p + k^{(p)}(0),$$

$$k(\varepsilon) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|x(t)|^2}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|e^{pt} x^{(p)}(t)|^2}{t} = 2p + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln E|x^{(p)}(t)|^2}{t} = 2p + k^{(p)}(\varepsilon).$$

На основі двох останніх рівностей отримуємо твердження теореми.

Теорема 2 доведена.

У даній роботі здійснено перехід від пошуку характеристичного показника рівняння (1) при використанні характеристичного квазіполінома

$$V(z) := z\left\{\int_{-h}^{\varepsilon} dr_1(s)e^{zs}\right\} - \int_{-h}^{\varepsilon} dr_2(s)e^{zs}$$

на комплексній площині $\mathbf{C}$ до відшукання характеристичного показника рівняння (4) на прямій $\mathbf{R}$ з наперед заданою точністю ε. Це значно полегшує відшукання даного показника.

Зауваження 1. Як збурене рівняння (4) можна було використати таке:

$$d\{Dx_t\} = \{Lx_t\}dt + x(t)dw(\varepsilon t). \tag{18}$$

Дане рівняння дає більш зрозумілий ймовірнісний зміст розв'язків (1), (2) та (18), (5), хоча ніякого полегшення для доведення теореми 2 ця заміна не приносить.

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради акад. АН ВШ В. К. Ясинському та акад. НАН України В. С. Королюку.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.
2. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – Москва: Физматлит, 1994. – Т. 2. – 473 с.
3. *Малик І. В., Ясинський В. К.* Асимптотична поведінка в середньому квадратичному розв'язків систем стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу // Доп. НАН України. – 2009. – № 10. – С. 22–27.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 13.10.2009

I. V. Malyk

Characteristic exponent of a solution of the deterministic functional differential equation of the neutral type in the scalar case

A criterion for the determination of the characteristic exponent of a solution of the deterministic functional differential equation of the neutral type is obtained.