ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2010

МЕХАНІКА

УДК 539.3


Член-кореспондент НАН України **О. Є. Андрейків, О. В. Галазюк**

# Математична модель деформування довгого циліндра з внутрішнім межовим шаром за обмежених переміщень його торців

*Запропоновано математичну модель деформування циліндра, яка за його розтягування обгрунтовує ефект локального звуження поперечного перерізу. При цьому доведено, що такий стан рівноваги можливий тільки за існування у площині симетрії циліндра внутрішнього межового шару.*

Запропоновано математичну модель розтягування довгого циліндра заданими обмеженими нормальними переміщеннями його торців. При цьому доведено, що такий стан рівноваги циліндра є можливим тільки за існування у його площині симетрії матеріальної поверхні розриву параметрів поля першого порядку [1] — внутрішнього межового шару, механічним проявом якого є стрибок пружних кутів повороту і, відтак, стрибок дотичних напружень під час переходу цієї поверхні вздовж нормалі.

Існування внутрішнього межового шару зі стрибком дотичних напружень відповідно до закону їх парності призводить до утворення поверхневого межового шару [2] зі стрибком у ньому поверхневих дотичних напружень на лінії виходу внутрішнього межового шару на поверхню циліндра. При цьому з'ясовано, що стискуючі радіальні напруження на цій лінії досягають максимального рівня і сприяють утворенню шийки для пластичних матеріалів.

Для циліндричних зразків, виготовлених із крихких матеріалів, руйнування відбувається без утворення шийки і спричинюється стрибком пружних кутів повороту і, відтак, дотичних напружень у межовому шарі. Величина стрибка визначається параметром $-\infty < q < 1$ — зведеною механічною характеристикою межового шару і досягає максимального значення на лінії його виходу на поверхню циліндра.

**1.** Однорідний пружний циліндр віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де $R$ — радіус циліндра, і будемо вважати, що під дією зовнішнього навантаження у циліндрі реалізується осесиметричний відносно осі $\gamma$ напружено-деформований стан.

Оскільки за симетричного навантаження циліндра площина $\gamma = 0$ його симетрії не зміщується в напрямку осі $\gamma$, то ненульові компоненти $u_\alpha(\alpha, \gamma)$, $u_\gamma(\alpha, \gamma)$ вектора пружного переміщення $\vec{u}$ у цьому випадку визначаються розв'язками рівнянь статики пружного тіла [3]:

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = X_\alpha(\alpha)\delta(\gamma), \qquad k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = 0 \tag{1}$$

в циліндрі $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant |\gamma| < \infty$ стосовно функцій

$$\theta(\alpha,\gamma) = \operatorname{div}\vec{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma, \qquad 2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = (\operatorname{rot}\vec{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma \tag{2}$$

за наявності у площині $\gamma = 0$ пелени об'ємних сил

$$X_\alpha(\alpha) = 4k^2\int\limits_0^\infty \xi A(\xi)J_1(\xi\alpha)\,d\xi \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \tag{3}$$

з довільною густиною розподілу $A(\xi)$. В рівняннях (1)–(3) $k^2 = (\lambda+2\mu)/\mu = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де $\lambda$, $\mu$ і $\nu$ — сталі Ламе і коефіцієнт Пуассона; $\delta(\gamma)$ — дельта-функція Дірака; $J_1(\xi\alpha)$ — функція Бесселя першого роду першого порядку.

Якщо розподіл об'ємних сил у площині $\gamma = 0$ задати законом

$$X_\alpha(\alpha) = 4k^2\frac{u_\gamma^0 2^{1-q}\Gamma(2-q)}{(k^2-1)}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(\xi\alpha)J_{1-q}(\xi)}{\xi^q}d\xi = \frac{4k^2(1-q)u_\gamma^0}{(k^2-1)}\alpha F(1;q;2;\alpha^2), \tag{4}$$

де $u_\gamma^0$ — постійна додатна величина, а $F(a;b;c;\alpha^2)$ — гіпергеометрична функція Гаусса, яка визначається гіпергеометричним рядом [3] з одиничним радіусом збіжності за умови $c-a-b>0$, то, розв'язавши систему рівнянь (1) і (2), знайдемо всі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant |\gamma| < \infty$. Зокрема, позначивши $u_\gamma^0 2^{1-q}\Gamma(2-q) = C$, одержимо

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha,\gamma) &= -\frac{C}{k^2-1}\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi,\\
\omega_\beta(\alpha,\gamma) &= \operatorname{sign}\gamma\frac{k^2C}{k^2-1}\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
u_\alpha(\alpha,\gamma) &= \frac{C}{k^2-1}\Bigg\{(k^2+1)\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{2-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi +\\
&\quad + (k^2-1)|\gamma|\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi\Bigg\},\\
u_\gamma(\alpha,\gamma) &= C\gamma\int\limits_0^\infty e^{-\xi|\gamma|}\frac{J_{1-q}(\xi)J_0(\xi\alpha)}{\xi^{1-q}}d\xi,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = -\frac{\mu C}{k^2-1}\left\{3(k^2-1)\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)d\xi - (k^2+1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_2(\xi\alpha)d\xi - (k^2-1)|\gamma|\int\limits_0^\infty e^{-\xi|\gamma|}\xi^q J_{1-q}(\xi)[J_0(\xi\alpha)-J_2(\xi\alpha)]d\xi\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = \frac{2\mu C}{k^2-1}\left\{\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)d\xi - (k^2-1)|\gamma|\int\limits_0^\infty e^{-\xi|\gamma|}\xi^q J_0(\xi\alpha)J_{1-q}(\xi)d\xi\right\}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = \frac{2\mu C}{k^2-1}\left\{k^2 \operatorname{sign}\gamma\int\limits_0^\infty \frac{J_{1-q}(\xi)}{\xi^{1-q}}e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)d\xi - \right.$$

$$\left.-(k^2-1)\gamma\int\limits_0^\infty e^{-\xi|\gamma|}\xi^q J_1(\xi\alpha)J_{1-q}(\xi)d\xi\right\}.$$

Аналіз виразів (5)–(7) параметрів напружено-деформованого стану вказує на те, що за розподілу (4) об'ємної сили $X_\alpha(\alpha)$ об'ємна деформація $\theta(\alpha,\gamma) < 0$ в циліндрі $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant |\gamma| < \infty$, а компонента $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\vec{\Omega} = 0{,}5\operatorname{rot}\vec{u}$ і, як наслідок, компонента $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)$ тензора напружень мають стрибок під час переходу площини $\gamma = 0$ вздовж нормалі до неї. Останнє підтверджує, що площина $\gamma = 0$, за означенням [1], є матеріальною поверхнею розриву параметрів поля першого порядку — внутрішнім межовим шаром, а об'ємна сила $X_\alpha(\alpha)$ — (4) є його математичною моделлю. Інтеграли у виразах (5)–(7) можна обчислити явно і знайти асимптотики характеристик напружено-деформованого стану в циліндрі $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant |\gamma| < \infty$ при $|\gamma| \to \infty$. Зокрема,

$$\lim_{|\gamma|\to\infty} u_\alpha(\alpha,\gamma) \cong -\frac{u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{\alpha}{|\gamma|}, \qquad \lim_{|\gamma|\to\infty} u_\gamma(\alpha,\gamma) \cong \operatorname{sign}\gamma\, u_\gamma^0,$$
$$\lim_{|\gamma|\to\infty} \theta_\alpha(\alpha,\gamma) \cong -\frac{u_\gamma^0}{k^2-1}\frac{1}{|\gamma|}. \quad (8)$$

Аналіз асимптотик (8) компонент $u_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $u_\gamma(\alpha,\gamma)$ вказує на те, що радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha,\gamma)$ прямує до нуля як $|\gamma|^{-1}$ $\forall\,\alpha \in [0,1]$, а нормальне переміщення $u_\gamma(\alpha,\gamma)$ — до константи $u_\gamma^0$.

Такий стан рівноваги є можливим з механічного погляду як розтягування циліндра на величину $2u_\gamma^0$. При цьому об'ємна деформація $\theta(\alpha,\gamma)$ і нормальні напруження зникають як $|\gamma|^{-1}$. Разом з тим, у площині $\gamma = 0$ інтеграли у поданнях (5)–(7) вироджуються у розривні інтеграли Вебера–Шафхейтліна [3] і визначають явні закони розподілу характеристик напружено-деформованого стану. Зокрема,

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\pm 0) = -3\mu\sqrt{\pi}\Gamma(2-q)u_\gamma^0\times$$

$$\times\left\{\frac{F\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}+q;1;\alpha^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-q\right)} - \frac{(k^2+1)\alpha^2 F\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}+q;3;\alpha^2\right)}{12\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-q\right)(k^2-1)}\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \frac{2\mu u_\gamma^0 \Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}{k^2-1} \frac{F\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}+q; 1; \alpha^2\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-q\right)}, \tag{9}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = \pm \frac{2\mu k^2 u_\gamma^0}{k^2-1} \frac{\alpha F(1; q; 2; \alpha^2)}{\Gamma(1-q)}.$$

Аналіз виразів (9) вказує на те, що дотичні напруження (5) $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)$ мають стрибок у площині $\gamma = 0$, величина якого визначається параметром $-\infty < q < 1$ і досягає максимального значення на лінії виходу межового шару на поверхню циліндра. Внаслідок закону парності дотичних напружень на поверхні циліндра $\alpha = 1$ існують поверхневі дотичні напруження, розподілені за законом (7). Нормальні напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$ у площині $\gamma = 0$ є розтягуючими за умови $u_\gamma^0 > 0$, причому при $q = 1/2$ їх розподіл є рівномірним, а нормальні напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \pm 0)$ є стискуючими, залежать від параметра $q$ і досягають максимального значення на поверхні циліндра $\alpha = 1$. При певному їх рівні з'являється пластична деформація, яка зумовлює локальне звуження поперечного перерізу циліндра і появу шийки.

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс механики сплошных сред / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
2. *Наумовец А. Г.* Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхностей // Прогресивні матеріали і технології: У 2-х т. – Київ: ВД "Академперіодика", 2003. – Т. 2. – С. 319–351.
3. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Физ.-хим. механика материаллов. – 2004. – **40**, № 4. – С. 17–33.

*Львівський національний університет ім. Івана Франка*

*Надійшло до редакції 11.11.2009*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **O. Ye. Andreikiv, O. V. Halazyuk**

## A mathematical model of deformation of a long cylinder with inner boundary layer under limited displacements of its butt-ends

*A new mathematical model of cylinder deformation is proposed. This model confirms the cross-section local narrowing effect. It is proved that this equilibrium state is possible if only the inner boundary layer exists.*