

О. В. Городецький, член-кореспондент НАН України **В. І. Нікішов**,
Ю. Д. Чашечкін

Індукція магнітного поля внутрішніми хвилями, що генеруються рухомим тілом в слабопровідній стратифікованій рідині

Отримано розв'язок, що описує внутрішні хвилі, які генеруються рухомим тілом в стратифікованій рідині. Лінеаризовані рівняння в наближенні Бусинеска розв'язані методом інтегральних перетворень. Знайдено асимптотичні залежності, що описують поле швидкостей внутрішніх хвиль, які генеруються овоїдом. Показано, що хвильова картина істотно залежить від числа Річардсона. Розглянуто індукцію магнітного поля внутрішніми хвилями, що генеруються овоїдом, який рухається в рідині скінченної глибини в магнітному полі Землі. Проведений аналіз картини індукованого магнітного поля залежно від параметрів задачі. Отримані розв'язки дозволяють провести оцінку інтенсивностей та лінійних розмірів вторинних магнітних полів, які можуть бути виміряні сучасною апаратурою.

Індукція електричних і магнітних полів в океані зумовлена впливом зовнішніх систем електричних струмів, а також взаємодією течії морської води з магнітним полем Землі. В останньому випадку поява збурень електромагнітного поля Землі пов'язана з природними течіями морської води. Основною причиною підвищеного інтересу до даної проблеми є те, що завдяки технологічному прогресу чутливість вимірювальних пристроїв значно виросла і це дозволило реєструвати слабкі збурення магнітного поля Землі, викликані рухом морської води, внаслідок чого істотно поліпшується моніторинг морів і океанів [1–3].

Моделювання індукції вторинних магнітних полів в океані ґрунтується на двох основних фактах. По-перше, через незначну електричну провідність впливом електромагнітного поля Землі на рух морської води можна знехтувати. По-друге, індуковане магнітне поле значно слабше магнітного поля Землі. Це дозволяє використовувати відомі теоретичні моделі хвильових і вихорових течій рідини для дослідження характеристик індукованих магнітних і електричних полів. Виходячи з фізичних особливостей задачі, можна зробити ряд припущень, які приймаються в наближенні магнітної гідродинаміки, зокрема нехтуємо ефектом Холла, струмом зміщення, розділенням зарядів та ін. [4, 5].

Розглянемо тіло, що рухається в електропровідній стратифікованій рідині скінченної глибини H зі швидкістю U (область 2 на рис. 1). Над водою знаходиться повітря (область 1), а тверде дно має слабку електропровідність (область 3). Передбачається, що зовнішнє магнітне поле Землі постійне, а електропровідність повітря мала. Вважається, що густина змінюється з глибиною за експоненціальним законом $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-\sigma_+ z)$, де ρ_{00} — характерне значення густини. Рівняння індукції в безрозмірній формі має вигляд [4, 5]

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_M [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{e}_0)], \quad (1)$$

де $\varepsilon_M = \text{Re}_M = UH\sigma_0\mu$; Re_M — магнітне число Рейнольдса; σ_0 — електропровідність середовища і μ — його магнітна проникність.

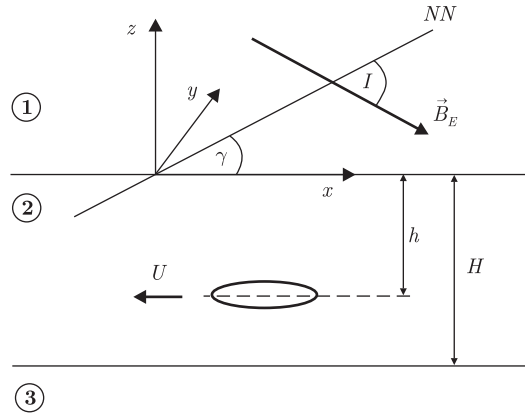


Рис. 1

Для визначення магнітного поля, індукованого внутрішніми хвилями, необхідні дані про поле швидкостей внутрішніх хвиль, що генеруються овоїдом, який моделюємо системою “джерело — стік”. Спочатку розглянемо випадок, коли овоїд обтікається потоком стратифікованої рідини зі швидкістю U . Такі задачі зручно розглядати як нестационарні з відповідними початковими умовами [6]. Покладемо, що потужність джерела (стоку) Q залежить від часу t як функція Хевісайда $H(t)$. Стационарний розв’язок задачі одержується за допомогою граничного переходу $t \rightarrow \infty$. Таке твердження випливає з фізичних міркувань.

Лінеаризовані рівняння руху в наближенні Буссинеска мають вигляд [6]:

$$\begin{aligned} \rho_0(z)Du &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & \rho_0(z)Dv &= -\frac{\partial p}{\partial y}, & \rho_0(z)Dw &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \\ D\rho + w\frac{d\rho_0(z)}{dz} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= H(t) \int_{-l/2}^{l/2} q(\xi)\delta(x-\xi)\delta(z+h)\delta(y)d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

де u, v, w — компоненти швидкостей вздовж осей x, y, z ; ρ, p — миттєві різниці між загальними і незбуреними значеннями густини і тиску; g — прискорення сили тяжіння, оператор $D = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$; $q(\xi) = Q[\delta(\xi+a) - \delta(\xi-a)]$; l — довжина тіла.

Розрахунки поля внутрішніх хвиль при рівномірному русі дублета (система рознесених джерела та стоку) у безмежному стратифікованому середовищі наведені в роботі [7]. Тонка структура стратифікованої течії поблизу перешкоди досліджена чисельно та експериментально в роботі [8]. Розв’язок задачі про генерацію внутрішніх хвиль системою джерел і стоків у шарі стратифікованої рідини при врахуванні впливу вільної поверхні поданий в роботі [9]. Аналіз показав, що у випадку слабкої стратифікації вільну поверхню можна замінити твердою межею (наближення “твердою кришкою” [10]). Тоді

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{і} \quad z = -H. \quad (3)$$

Крім того, пульсації швидкості, тиску і густини повинні затухати при віддаленні від тіла, тобто

$$u = v = w = p = \rho \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty. \quad (4)$$

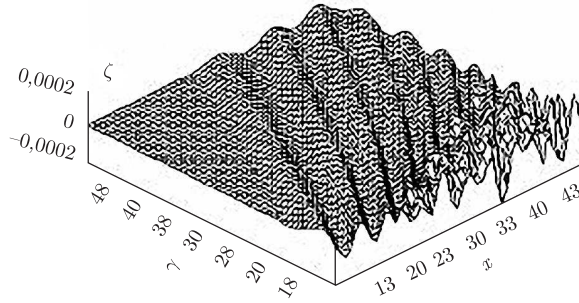


Рис. 2

На відміну від [6], будемо нехтувати залежністю густини від вертикальної координати в конвективних членах рівнянь руху (2). Це є один із варіантів наближення Буссинеска. Вводимо характерні величини довжини H , швидкості U і густини ρ_{00} . Тоді система рівнянь руху зводиться до одного рівняння відносно w (у безрозмірному вигляді), яке можна записати як

$$D^2 \Delta w + \lambda \sigma^+ \Delta_h w = D^2 H(t) \delta(y) \delta'(z+h) \int_{-l/2}^{l/2} q(\xi) \delta(x-\xi) d\xi, \quad (5)$$

де $\lambda = gH/U^2$ — обернене число Фруда.

Застосовавши до рівняння (2) метод інтегральних перетворень Фур'є за змінними x, y та перетворення Лапласа за t , одержимо розв'язок для образу функції

$$\hat{\Gamma}_w = \frac{e^{-ik_1 \xi}}{2s} \frac{1}{\text{sh } M} [\text{sign}(z+h) \text{sh } M(1-|z+h|) - \text{sh } M(1+z-h)], \quad (6)$$

де Γ_w визначається формулою $w = \int_{-l/2}^{l/2} q(\xi) \Gamma_w(x, y, z, \xi) d\xi$.

Формули, що описують внутрішні хвилі, знаходяться з застосуванням обернених інтегральних перетворень. Інтеграли оцінюються за допомогою методів теорії комплексної змінної. Використання граничної теореми перетворення Лапласа дозволило визначити правило обходу полюсів [6]. Залишаючи члени, що дають найбільший внесок при великих відстанях від овоїда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, отримуємо вираз для Γ_w

$$\Gamma_w(x, y, z, \xi) = \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi z) \int_{\varphi}^{\tilde{\vartheta}_n} Q_w e^{i\omega_n r \sin(\vartheta-\varphi)} d\vartheta, \quad (7)$$

де $\omega = \omega_n \sin \vartheta$; $Q_w = in \cos(n\pi h) e^{-i\omega_n \xi \sin \vartheta}$; φ — кут між віссю x та вектором \vec{r} ; $\tilde{\vartheta}_n = \arcsin \text{Ri}_n$ при $\text{Ri}_n < 1$ і $\tilde{\vartheta}_n = \pi/2$ при $\text{Ri}_n > 1$, $\text{Ri}_n = \text{Ri}/n\pi$, $\text{Ri} = NH/U$ — число Річардсона; $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_{00}} \left(\frac{d\rho_0}{dz} \right)}$ — частота плавучості [10].

Аналогічні вирази були отримані для інших компонент швидкості u і v . На рис. 2 наведено результати розрахунку поля відхилень ізопікнічних ліній ζ від положення рівноваги залежно від x та y . Параметри руху та стратифікації були такі: $\text{Ri} = 2,8$; $Q = 0,005$; $\sigma_+ = 0,02$;

$a = 0,18$; $z = -0,2$; $h = 0,35$. Результати обчислень нормовані на глибину H . Аналіз показав, що хвильова картина істотно залежить від числа Річардсона, зокрема кардинально змінюється кут хвильового фронту. При зростанні числа Річардсона (зменшенні швидкості) збільшується число мод, які формують хвильову картину. Близьче до осі проходу тіла картина хвиль сильно порізана, що пов'язано з тим, що в її формуванні з'являються все більш високочастотні моди.

Для визначення індукованого магнітного поля переходимо до нерухокої системи координат. Рівняння Максвелла лінійні відносно \vec{E} , \vec{H} , \vec{v} , тому достатньо розглядати вплив простої гармонічної компоненти. Вектор $\vec{v} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{m}w$, що описує поле швидкостей внутрішніх хвиль у нерухокій системі координат, можна записати у вигляді $\vec{v} = \vec{v}_\vartheta e^{i\omega_n x \sin \vartheta - i\omega_n y \cos \vartheta + i\omega t}$; дане поле є гармонійним відносно x , y , t . Очевидно, що відповідне електромагнітне поле буде мати подібну гармонічну структуру

$$\vec{H} = \vec{h}_\vartheta e^{i\omega_n x \sin \vartheta - i\omega_n y \cos \vartheta - i\omega t}, \quad \vec{E} = \vec{e}_\vartheta e^{i\omega_n x \sin \vartheta - i\omega_n y \cos \vartheta - i\omega t}. \quad (8)$$

Диференціальне рівняння для $\vec{h}_\vartheta(z)$ можна отримати з рівняння індукції (1) у вигляді

$$\frac{d^2 \vec{h}_\vartheta}{dz^2} - \delta^2 \vec{h}_\vartheta = -\varepsilon_M Q_w (i\vec{\Phi} \sin n\pi z + \vec{T} \cos n\pi z), \quad (9)$$

де $\delta^2 = \omega_n^2 - i\sigma_0 \omega \varepsilon_M$;

$$\vec{\Phi} = \frac{n^2 \pi^2}{\omega_n} B_E^m (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta) + \vec{m} \cdot \omega_n B_E^r,$$

$$\vec{T} = B_E^m n\pi \cdot \vec{m} + B_E^r n\pi (-\vec{i} \sin \vartheta + \vec{j} \cos \vartheta),$$

вектор $\vec{r} = (\sin \vartheta, -\cos \vartheta, 0)$ спрямований вздовж поширення хвильового цугу, вектор \vec{m} направлений вздовж осі Oz . Верхній індекс означає проекцію на відповідний напрямок, \vec{B}_E — вектор геомагнітної індукції. Подамо геомагнітну індукцію \vec{B}_E у вигляді [11] (див. рис. 1) $\vec{B}_E = F(\vec{i} \cos I \cos \gamma + \vec{j} \cos I \sin \gamma - \vec{m} \sin I) = F\vec{e}_0$, де одиничні вектори \vec{i} , \vec{j} , \vec{m} спрямовані вздовж координатних осей x , y , z , відповідно; F — модуль \vec{B}_E ; γ — кут між віссю x і північним полюсом; N — магнітне нахилення.

Вважаємо, що електропровідність у ґрунті є малою. Вона мала у повітрі також. Тоді для областей 1 та 3 (рис. 1) $\sigma_0 = 0$, і рівняння (9) для цих областей набуває вигляду

$$\frac{d^2 \vec{h}_\vartheta}{dz^2} - \omega_n^2 \vec{h}_\vartheta = 0. \quad (10)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$\vec{h}_\vartheta = \vec{A}_1 \text{sh } \delta z + \vec{A}_2 \text{ch } \delta z + \vec{M} (i\vec{\Phi} \sin n\pi z + \vec{T} \cos n\pi z), \quad (11)$$

де

$$\vec{M} = -\frac{2\varepsilon_M Q}{n^2 \pi^2 + \delta^2} \cdot n \cos(n\pi h) \sin(a\omega_n \sin \theta).$$

З урахуванням затухання магнітної напруженості в повітрі і в ґрунті на далекій відстані від шару стратифікованої рідини розв'язки для областей 1 і 3 мають вигляд $\vec{h}_\vartheta = \vec{A}_3 e^{-\omega_n z}$ та

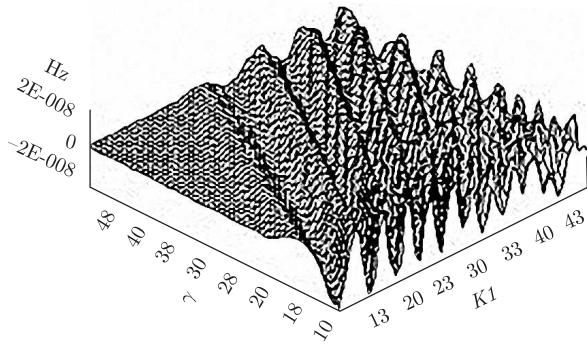


Рис. 3

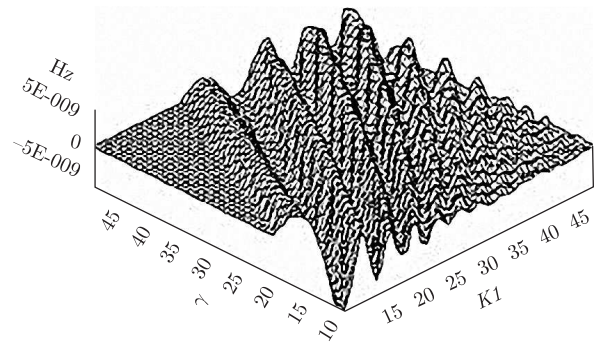


Рис. 4

$\vec{h}_\vartheta = \vec{A}_4 e^{\omega_n z}$ відповідно. Константи $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ визначаються за допомогою граничних умов, які характеризують неперервність нормальної і тангенційної складових магнітного поля на границях розділу повітря — вода і вода — ґрунт.

Таким чином, магнітне поле, індуковане внутрішніми хвилями, які генеруються корпусом тіла, описується таким співвідношенням:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varphi}^{\vartheta_n} \vec{h}_\vartheta(z) e^{i\omega_n x \sin \vartheta - i\omega_n y \cos \vartheta + i\omega t} d\vartheta.$$

Для розрахунків був використаний метод стаціонарної фази для великих значень r .

Результати розрахунків вертикальної компоненти вторинного магнітного поля наведені на рис. 3 (у воді при $z = -0,2$) і рис. 4 (у повітрі при $z = 1,0$), де поздовжня координата є $x_1 = x + t$ (у безрозмірному вигляді). Параметри задачі були ті ж самі, як і при розрахунках поля внутрішніх хвиль. Напрямки вектора геомагнітної індукції задавалися кутами: $\gamma = 0$ і $I = 60^\circ$, крім того, магнітне число Рейнольдса $\varepsilon_M = 0,001$. Аналіз показав, що магнітуда вторинного магнітного поля зменшується в повітрі з ростом відстані від поверхні, високочастотні осциляції магнітного поля вироджуються. Отримані розв'язки дозволяють провести оцінку інтенсивностей та лінійних розмірів вторинних магнітних полів, які можуть бути виміряні сучасною апаратурою. При розробці модельних уявлень про характер гідродинамічних процесів, що відбуваються в товщі вод, корисними є також результати з обчислення фазової картини розподілу збурень магнітного поля.

Роботу виконано за підтримки проектів в рамках спільного конкурсу НАНУ і РФФД.

1. Glazman R. E., Golubev Y. N. Variability of the ocean-induced magnetic field predicted at sea surface and at satellite altitudes // J. Geophys. Res. – 2005. – **110**, C12011. – P. 1–13.
2. Palshin N. A. Oceanic electromagnetic studies: a review // Surveys in Geophysics. – 1996. – **17**. – P. 455–491.
3. Lilley F., Hitchman A., Milligan P., Pedersen T. Sea-surface observations of the magnetic signal of ocean swell // Geophysical J. Intern. – 2004. – **159**, No 2. – P. 565–572, 2004.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Физматлит, 2001. – 653 с.
5. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. – Москва: Мир, 1968. – 492 с.
6. Нікішов В. І. Внутрішні хвилі, які виникають у стартифікованій рідині скінченної глибини при обтіканні системи “джерело – стік” // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1977. – № 5. – С. 441–444.

7. Смирнов С. А., Чашечкин Ю. Д. Подветренные (присоединенные) внутренние волны при произвольной ориентации набегающего потока // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. – 1998. – **34**, № 4. – С. 528–536.
8. Гуцин В. А., Миткин В. В., Рождественская Т. И., Чашечкин Ю. Д. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи цилиндра // Прикл. механика и техн. физика. – 2007. – **48**, № 1. – С. 43–54.
9. Олійник О. Я., Стеценко О. Г., Нікішов В. І. Внутрішні хвилі, викликані системою джерел і стоків у потоці слабо стратифікованої рідини // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 1. – С. 36–40.
10. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981. – 281 с.
11. Weaver T. J. Magnetic variations associated with ocean waves and swells // J. Geoph. Res. – 1965. – **70**. – P. 1921. – 1929.

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Надійшло до редакції 15.02.2010

J. V. Gorodetsky, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. I. Nikishov**,
Yu. D. Chashechkin

Induction of a magnetic field by internal waves generated by a body moving in a weakly conductive stratified fluid

A solution describing the internal waves generated by a body moving in a stratified fluid is obtained. The linearized equations of motion in the Boussinesq approximation are solved by the method of integral transformations. Asymptotic expressions describing the velocity field of internal waves generated by an ovoid have been found. It is shown that the wave pattern essentially depends on the Richardson number. Induction of a magnetic field by internal waves generated by an ovoid moving in a finite-depth layer of the stratified fluid in Earth's magnetic field is considered. The analysis of the pattern of a motionally induced magnetic field depending on the task parameters is fulfilled. The obtained solutions allow estimating the intensity and linear sizes of secondary magnetic fields that can be measured by modern devices.