УДК 531.35

Б. И. Коносевич

Асимптотические представления угловых колебаний оси симметрии снаряда

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

У додаток до двох відомих, розглянуто ще два типи асимптотичних представлень кутових коливань осі симетрії снаряда. Дано оцінки похибок усіх цих представлень для випадку незагасаючих коливань та для випадку загасання низькочастотних коливань.

В теории полета быстровращающегося артиллерийского снаряда широко используется асимптотическое представление угловых колебаний его оси симметрии, полученное на основе метода ВКБ. Известно также модифицированное асимптотическое представление, в котором учтен следующий член разложения по параметру для частного решения линеаризованных дифференциальных уравнений угловых колебаний [1–3]. Оценки погрешности обоих типов представлений получены в [1] в виде сложных неравенств, содержащих операции дифференцирования, интегрирования и взятия максимума.

В настоящей работе рассмотрены еще два типа асимптотических представлений угловых колебаний оси симметрии снаряда. Найдены оценки погрешности всех этих представлений для случая незатухающих колебаний и для случая затухания низкочастотых колебаний. Оценки выражены через символы порядка $O(\varepsilon^n)$, где ε — малый параметр.

1. Исходные обозначения. Система уравнений движения осесимметричного снаряда в атмосфере, линеаризованная по переменным q, r, α, β, ψ, состоит из подсистемы

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \varepsilon^3 v\cos\theta, \qquad \dot{y} = \varepsilon^3 v\sin\theta, \qquad \dot{z} = \varepsilon^3 v\psi,\\
&\dot{v} = \varepsilon^3\frac{v^2}{m}R_1^{(0)}(y,v) - \varepsilon^4 g\sin\theta,\\
&\dot{\theta} = -\varepsilon^4\frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^4\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v)\alpha - R_3^{(0)}(y,v,p)\beta],\\
&\dot{\psi} = \varepsilon^4\frac{g}{v}\psi\sin\theta + \varepsilon^2\frac{v}{m}[R_3^{(0)}(y,v,p)\alpha + R_2^{(0)}(y,v)\beta],\\
&\dot{p} = \varepsilon^4\frac{p}{I_1}vM_{1D}^{(0)}(y,v),
\end{aligned}\tag{1}$$

описывающей поступательное движение и продольное вращение снаряда, и подсистемы

$$\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta, \qquad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\psi,\varepsilon)\tag{2}$$

уравнений угловых колебаний его оси симметрии. В подсистеме (2) приняты обозначения

$$\begin{aligned}
&a = \frac{1}{I_2}[\varepsilon^2 vM_{2D}^{(0)}(y,v) + iI_1p], \qquad b = \frac{v^2}{I_2}[\varepsilon^2 M_2^{(0)}(y,v,p) + iM_3^{(0)}(y,v)],\\
&k = \varepsilon^2\frac{v}{m}[R_2^{(0)}(y,v) + iR_3^{(0)}(y,v,p)], \qquad l = \varepsilon^2\frac{g}{v}(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta)
\end{aligned}\tag{3}$$

и комплексные переменные $\Omega = q + ir$, $\Delta = \alpha + i\beta$. Определения величин, входящих в формулы (1), (3), даны в [4].

Переменные в уравнениях (1), (2) отнесены к верхним характерным числовым значениям их модулей. Малый параметр ε введен вместо числа 0,1. Уравнения (1), (2) рассматриваются на отрезке времени $[t_0, t_1]$ от момента выстрела t_0 до момента t_1 падения снаряда на землю. Он имеет максимальную длину $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$ при больших углах стрельбы.

Далее символы $O(\varepsilon^n)$ $[O^*(\varepsilon^n)]$ обозначают функции фазовых переменных, времени и параметра ε, которые в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени имеют при $\varepsilon \to 0$ порядок не ниже ε^n [равный ε^n]; для положительных функций применяются обозначения $O_+(\varepsilon^n)$ $[O_+^*(\varepsilon^n)]$. Для сокращения записи вводятся векторы $\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p)$, $\xi^{(4)} = (y, v, \theta, p)$, $\xi^{(3)} = (y, v, p)$. Большими латинскими буквами обозначаются функции, которые при y, v, θ, ψ, $p = O(1)$ равны $O(1)$ вместе со своими частными производными по компонентам вектора $\xi^{(5)}$.

2. Условия правильности полета. В исходной нелинейной системе медленные переменные x, y, z, v, θ, ψ, p ограничены по модулю значениями порядка 1. При этом

$$O_+^*(\varepsilon) \leqslant v^2 \leqslant O_+^*(1), \qquad p = O^*(1). \tag{4}$$

Ограниченность модулей быстрых переменных q, r, α, β в нелинейной системе обеспечивается при выполнении условий правильности полета. Полагаем

$$w = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot{a} + \dot{k}}{2}, \tag{5}$$

$$\lambda_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w}, \qquad \lambda_{j+} = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \qquad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Здесь $\dot{a}$, $\dot{k}(\xi^{(4)}, \varepsilon)$, $\dot{w}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon)$ — производные функций a, k, w по t в силу уравнений (1), $\sqrt{w} = i\sqrt{_+(-w)}$, $\sqrt{_+}$ — главное значение корня, верхний и нижний знаки соответствуют $j = 1$ и $j = 2$.

Подставив выражения (3) в (5), получаем

$$w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = -\frac{p^2 I_1^2}{4 I_2^2}\left(1 - \frac{4v^2 I_2 M_3^{(0)}(y, v)}{p^2 I_1^2}\right) + O(\varepsilon^2). \tag{7}$$

Предположим, что здесь выражение в скобках положительно, и обозначим его через σ^2:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{4v^2 I_2 M_3^{(0)}(y, v)}{p^2 I_1^2} > 0. \tag{8}$$

Снаряд и орудие конструируются так, что в момент выстрела t_0 выполняются условие Маиевского (8) и неравенство $0{,}6 < \sigma(t_0) < 0{,}7$. Величина v^2 в момент выстрела равна $O_+^*(1)$, а затем убывает до значений порядка ε. Угловая скорость p на всей траектории равна $O^*(1)$. Тогда условие (8) выполняется на всей траектории и при этом

$$\sigma(t_0) \leqslant \sigma \leqslant 1 - O_+^*(\varepsilon), \qquad \sigma(t_0) = O_+^*(1). \tag{9}$$

Полагая $\lambda_j = n_j + i\omega_j$ $(j = 1, 2)$, потребуем, чтобы выполнялись еще два неравенства

$$n_1,\ n_2 \leqslant O_+^*(\varepsilon^4). \tag{10}$$

Сформулируем теперь условия правильности полета снаряда [5]. Пусть в нелинейной системе уравнений движения снаряда переменные Ω, Δ имеют в момент выстрела t_0 порядок не ниже 1, т. е. Ω, $\Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$. Если на траектории полета снаряда выполнены условия (8)–(10), то эти переменные имеют порядок не ниже 1 на всей траектории:

$$\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1), \qquad t \in [t_0, t_1]. \tag{11}$$

В [3] дана оценка погрешности решения системы (1), (2) по сравнению с решением исходной нелинейной системы при тех же начальных условиях в момент выстрела. Для переменных ξ такая погрешность равна $O(\varepsilon^3)$. Поэтому в системе (1), (2) переменные y, v, θ, ψ, p ограничены по модулю значениями порядка 1, а из выполнения условий правильности полета для решений нелинейной системы следует выполнение этих условий и оценок (11) для решений системы (1), (2). Отметим, что система (1), (2) определяет амплитуды и фазы угловых колебаний оси симметрии с погрешностями $O(\varepsilon)$ и $O(1)$.

С помощью формул (3), (6), (7) получаем

$$\omega_j = \frac{pI_1}{2I_2}(1 \pm \sigma) + O(\varepsilon^2), \qquad n_j = O(\varepsilon^2), \qquad j = 1, 2. \tag{12}$$

Отсюда с учетом (9) следует, что $\omega_1 = O^*_+(1)$, $O^*_+(\varepsilon) \leqslant \omega_2 \leqslant O^*_+(1)$. Частота ω_2 равна $O^*_+(1)$ только на начальном участке траектории.

В общем случае при выполнении неравенств (10) колебания оси симметрии снаряда, вообще говоря, не являются затухающими, и справедливы соотношения

$$\exp \int\limits_{\tau}^{t} \lambda_j(\tau_1, \varepsilon)\, d\tau_1 = O(1), \qquad j = 1, 2, \qquad t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1. \tag{13}$$

Однако возможны случаи затухания колебаний с одной или обеими частотами ω_j $(j = 1, 2)$. Согласно (12), наименьшие отрицательные значения величин n_j равны $-O^*_+(\varepsilon^2)$.

3. Основное асимптотическое представление угловых колебаний. Обозначим через ξ, Ω, $\Delta(t, \varepsilon)$ решение системы уравнений (1), (2) при начальных условиях, заданных в момент выстрела. Рассматривая зависимость $\xi^{(5)}(t, \varepsilon)$ как известную, запишем подсистему (2) уравнений углового движения в виде

$$\dot{\Omega} = a(t, \varepsilon)\Omega + b(t, \varepsilon)\Delta, \qquad \dot{\Delta} = -i\Omega - k(t, \varepsilon)\Delta + l(t, \varepsilon), \tag{14}$$

где a, b, k, $l(t, \varepsilon) = a$, b, k, $l(\xi^{(5)}(t, \varepsilon), \varepsilon)$ — известные функции времени.

Эффективным средством построения приближенных решений линейных дифференциальных уравнений, содержащих большой или малый параметр, является метод ВКБ (см. [1, 2]). Формальное применение этого метода к уравнениям (14) приводит к формулам

$$\begin{gathered} \Omega^{[0]}_+(t, \varepsilon) = i \sum_{j=1}^{2} [\lambda_{j+}(t, \varepsilon) + k(t, \varepsilon)] \widetilde{u}^{[0]}_{j+}(t, \varepsilon) + e_1(t, \varepsilon), \\ \Delta^{[0]}_+(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{2} \widetilde{u}^{[0]}_{j+}(t, \varepsilon) + d_1(t, \varepsilon). \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $e_1,\ d_1(t,\varepsilon) = e_1,\ d_1(\xi^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon)$, функции

$$e_1 = e_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{bl}{ib-ak}, \qquad d_1 = d_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = -\frac{al}{ib-ak} \tag{16}$$

определены из условия равенства нулю правых частей уравнений (2). Функции $\widetilde{u}_{j+}^{[0]}$ $(j = 1,2)$ выражаются формулами

$$\widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = C_{j+}^{[0]} \exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau = C_{j+}^{[0]} \frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)} \exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \tag{17}$$

а комплексные постоянные $C_{1+}^{[0]}$, $C_{2+}^{[0]}$ определяются начальными условиями.

Величины λ_{j+} $(j = 1,2)$ заданы формулами (6), в которых производная $\dot{w}$ зависит от неизвестных α, β. Поэтому функции (15) уместно назвать приближенным квазирешением уравнений (14). Чтобы получить из квазирешения приближенное решение уравнений (14), не содержащее неизвестных α, β, достаточно в формуле (15) для $\Omega_{+}^{[0]}$ вместо функций λ_{j+} взять λ_j $(j = 1,2)$. Таким образом, имеем приближенное решение

$$\begin{aligned} \Omega^{[0]}(t,\varepsilon) &= i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)]\widetilde{u}_j^{[0]}(t,\varepsilon) + e_1(t,\varepsilon), \\ \Delta^{[0]}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2}\widetilde{u}_j^{[0]}(t,\varepsilon) + d_1(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{18}$$

в котором функции

$$\widetilde{u}_{j}^{[0]}(t,\varepsilon) = C_{j}^{[0]} \exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_{j+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau = C_{j}^{[0]} \frac{w^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)} \exp\int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau,\varepsilon)\,d\tau \tag{19}$$

отличаются от функций (17) только значениями постоянных $C_j^{[0]}$ $(j = 1,2)$.

Введем переменные u_{1+}, u_{2+} по формулам

$$\Omega = i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_{j+}(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)]u_{j+} + e_1(t,\varepsilon), \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{2} u_{j+} + d_1(t,\varepsilon). \tag{20}$$

Эти переменные удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений, которая с учетом начальных условий эквивалентна системе двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_{j+}(t,\varepsilon) = \widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) \pm \int\limits_{t_0}^{t} \left\{\rho(u_{1+} + u_{2+}) + \frac{1}{2w^{1/2}}[i\dot{e}_1 + (\lambda_{3-j,+} + k)\dot{d}_1]\right\} \times \\ \times \left(\exp\int\limits_{\tau}^{t} \lambda_{j+}d\tau_1\right)d\tau, \qquad j = 1,2. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\rho = \frac{\ddot{w}}{8w^{3/2}} - \frac{5\dot{w}^2}{32w^{5/2}}. \tag{22}$$

Чтобы определить порядки разностей $u_{j+} - \widetilde{u}_{j+}^{[0]}$, достаточно оценить интегралы в правых частях уравнений (21). Пользуясь изложенной в [4] техникой оценок, получаем для случая незатухающих колебаний

$$u_{j+}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{j+}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \qquad u_j(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_j^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{4-j}), \qquad j = 1,2. \tag{23}$$

Вычитая теперь равенства (18) из (20), находим оценку погрешности квазирешения (15), а затем и приближенного решения (18):

$$\begin{aligned} &\Omega(t,\varepsilon) - \Omega_+^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta_+^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad t \in [t_0, t_1];\\ &\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \tag{24}$$

4. Модифицированные асимптотические представления угловых колебаний. Чтобы получить более точное приближенное общее решение линеаризованных уравнений угловых колебаний, в [1, 2] разыскивается уточненное частное решение этих уравнений. Оно определяется как сумма двух первых членов разложения точного частного решения по обратным степеням большого параметра. В соответствии с этим правилом, приближенное частное решение уравнений (14) имеет вид $\widetilde{\Omega} = e_1 + e_2$, $\widetilde{\Delta} = d_1 + d_2$, где

$$e_2 = -\frac{\dot{e}_1 k + \dot{d}_1 b}{ib - ak}, \qquad d_2 = \frac{i\dot{e}_1 + \dot{d}_1 a}{ib - ak}. \tag{25}$$

Так как функции (16) зависят от θ, ψ, то в выражения $\dot{e}_1$, $\dot{d}_1$ через $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ входят неизвестные α, β. Чтобы получить конструктивное определение поправок e_2, d_2, в формулах (25) следует использовать выражения производных $\dot{e}_1$, $\dot{d}_1$, которые содержат известное приближение для α, β. Рассмотрим два варианта выбора приближенных выражений для $\dot{e}_1$, $\dot{d}_1$.

Вариант 1 [1]. При вычислении $\dot{e}_1$, $\dot{d}_1$ в уравнениях (1), определяющих $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, принимается $\alpha = \beta = 0$.

Вариант 2. При вычислении $\dot{e}_1$, $\dot{d}_1$ в уравнениях (1), определяющих $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, вместо α, β берутся их приближенные средние значения $\alpha = \operatorname{Re} d_1$, $\beta = \operatorname{Im} d_1$.

Модифицированное приближенное решение для варианта с номером $m = 1,2$ представляется формулами

$$\begin{aligned} \Omega^{[m]}(t,\varepsilon) &= i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_j(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon)]\widetilde{u}_j^{[m]}(t,\varepsilon) + e_1(t,\varepsilon) + e_2^{[m]}(t,\varepsilon),\\ \Delta^{[m]}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2}\widetilde{u}_j^{[m]}(t,\varepsilon) + d_1(t,\varepsilon) + d_2^{[m]}(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{26}$$

где поправки $e_2^{[m]}$, $d_2^{[m]}$ определяются описанным выше способом, а функции $\widetilde{u}_j^{[m]}$ $(j = 1,2)$ отличаются от функций (19) только значениями комплексных постоянных.

В случае, когда колебания оси симметрии снаряда не предполагаются затухающими, установлены квадратичные оценки погрешности двух приближенных решений (26):

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[m]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[m]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad t \in [t_0, t_1]. \tag{27}$$

Показано, что эти оценки достигаются для некоторых типов снарядов на некоторых траекториях их полета. Поэтому, с учетом (24), варианты 1, 2, вообще говоря, обеспечивают точность не выше, чем вариант 0.

При введении малого параметра в качестве масштабов нормализованных переменных q, r и α, β приняты 1 с$^{-1}$ и $0{,}1^2$, а сам малый параметр ε введен вместо числа 0,1. Поэтому оценкам (27) соответствуют числовые оценки, которые означают, что в приближенных решениях (26) исходные ненормализованные переменные q, r определяются с погрешностью порядка не ниже $0{,}1^2$, а переменные α, β — с погрешностью порядка не ниже $0{,}1^4$.

Предположим, что колебания с низкой частотой ω_2 затухают, так что $n_2 = -O_+^*(\varepsilon^2)$, а для n_1 остается в силе соотношение (10). В этом случае для вариантов 1, 2 вместо квадратичных оценок (27) имеют место кубические оценки погрешности.

5. Интегральное асимптотические представление угловых колебаний. Более точное приближенное решение линеаризованных уравнений угловых колебаний оси симметрии снаряда можно получить, пользуясь приближенными выражениями переменных u_{j+} $(j = 1, 2)$, которые определяются уравнениями (21) при подстановке в их правые части функций $\widetilde{u}_j^{[0]}(t,\varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ вместо явно входящих величин u_{j+} $(j = 1, 2)$ и функций $q^{[0]}$, $r^{[0]}$, $\alpha^{[0]}$, $\beta^{[0]}(t,\varepsilon)$, соответствующих приближенному решению $\Omega^{[0]}$, $\Delta^{[0]}(t,\varepsilon)$, — вместо значений q, r, α, $\beta(t,\varepsilon)$ для точного решения уравнений (14).

В случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда найдена следующая оценка погрешности такого интегрального представления:

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[4]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4), \qquad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[4]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^4), \qquad t \in [t_0, t_1].$$

В случае затухания колебаний с низкой частотой ω_2 точность интегрального представления повышается:

$$\Omega(t,\varepsilon) - \Omega^{[4]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^5), \qquad \Delta(t,\varepsilon) - \Delta^{[4]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^5), \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Полученные оценки соответствуют результатам вычислительных экспериментов.

1. *Пугачев В. С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
2. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – Москва: Наука, 1969. – 380 с.
3. *Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н., Богодистов С. С.* Внешняя баллистика. 3-е изд. – Москва: Машиностроение, 1991. – 640 с.
4. *Коносевич Б. И.* Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 6. – С. 930–941.
5. *Коносевич Б. И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 19.11.2009

B. I. Konosevich

Asymptotic representations of angular oscillations of the axis of symmetry of a projectile

Two new types of asymptotic representations of angular oscillations of the axis of symmetry of a projectile are proposed in addition to two known ones. Estimations of the error of these representations are obtained both for the cases of non-damped oscillations and damped low-frequency oscillations.