Доповіді
національної
академії наук
України

7 • 2010

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О Фурье-комбинированном сингуларисном процессе зарядки аккумулятора

Розв'язується задача з визначення напруги на акумуляторі при його зарядженні від Фур'є-комбінованої сингуларисної напруги.

В работах [1–3] представлены новые виды устройств заряда аккумуляторов. Этот заряд осуществляется под действием выпрямленного в двух полупериодах синусоидального напряжения $U(t)$. Графическое изображение выпрямленного напряжения U приведено на рис. 1, где U_a — амплитуда синусоидального напряжения $U(t)\,\sin\omega t$; ω — круговая частота; t — время.

Напряжение U уже не является синусоидальным [4]. Оно может быть выражено в виде ряда Фурье [4]

$$U = \frac{4U_a}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t - \cdots\right). \tag{1}$$

Известно [4, 5], что периодические функции с периодом 2π, удовлетворяющие условиям Дирихле, разлагаются в ряд Фурье общего вида

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin(s\omega t + \varphi_s). \tag{2}$$

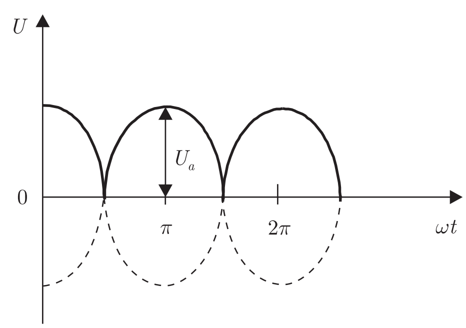

Рис. 1

Приведем (1) к виду (2). Для этого воспользуемся тригонометрическим преобразованием [5] $\cos x = \sin(\pi/2 - x) = -\sin(x - \pi/2)$ и тогда (1) запишем в виде

$$U = \frac{4U_a}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3}\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3\cdot 5}\sin\left(4\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{5\cdot 7}\sin\left(6\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots\right]. \quad (3)$$

Как видим, (2) и (3) подобны по форме. Сигнал, описываемый выражением (2), является полигармоническим с постоянной составляющей A_0. При подаче сигнала (2) на вход объекта (электроцепи) в момент $t = 0$

$$f(0) = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin\varphi_s,$$

где A_0 и $A_s \sin\varphi_s$, $s = \overline{1,\infty}$, являются скачкообразными сигналами, которые могут быть записаны в виде

$$f(0) = A_0 1(t) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s 1(t) \sin\varphi_s, \quad (4)$$

где $1(t) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{array}\right\}$.

Применяя к (4) Фурье-разложение (2), получим

$$f(\omega t) = A_0 1(t) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s 1(t) \sin(s\omega t + \varphi_s). \quad (5)$$

На основе работ [6, 7] к выражению (5) можно применить сингуларисные разложения

$$U1(t) = U\left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right), \quad (6)$$

$$U_a \sin(\omega t \pm \varphi) = U_a(1 - e^{-\alpha t})\sin(\omega t \pm \varphi) + U_a e^{-\alpha t}\sin(\pm\varphi)\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t, \quad (7)$$

соответственно, к $A_0 1(t)$ — выражение (6), а к $A_s 1(t)\sin(s\omega t + \varphi_s)$ — выражение (7), где α — коэффициент затухания; $U_{a1} = 1/\pi$, $U_{ak} = U_{a1}/k$, $k = \omega_k/\omega_1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = 1$, $n \approx 12$. Тогда (5) с учетом (6) и (7) будет следующим:

$$f(\omega t) = A_0\left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty}\left[A_s(1 - e^{-\alpha t})\sin(s\omega t + \varphi_s) + A_s e^{-\alpha t}\sin\varphi_s \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right]. \quad (8)$$

После группирования в (8) однородных членов получим

$$f(\omega t) = (1 - e^{-\alpha t})\left[A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin(s\omega t + \varphi_s)\right] + \\ + \left(e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right)\left(A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s\sin\varphi_s\right). \quad (9)$$

Выражение (9) является Фурье-комбинированным сингуларисным разложением периодической несинусоидальной функции $f(\omega t)$. Далее применим выведенное выражение (9) к выражению (3), но при этом из-за малости в (3) слагаемых после второго будем (3) рассматривать в виде

$$U = \frac{4U_a}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{10}$$

В виде (9) выражение (10) принимает вид

$$U = \frac{4U_a}{\pi}\left\{(1 - e^{-\alpha t})\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{5}{6}e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right\}. \tag{11}$$

Именно напряжение $U = (11)$ подается на пластины аккумулятора, который заряжается под действием тока $i(t)$, полученного от действия напряжения (11). Определим напряжение на аккумуляторе (Ак) под действием тока заряда $i(t)$ с помощью операционного метода [8], используя преобразование Карсона. Дифференциальное уравнение цепи заряда Ак следующее:

$$\frac{4U_a}{\pi}\left\{(1 - e^{-\alpha t})\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{5}{6}e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right\} = rC\frac{dU_C}{dt} + U_C, \tag{12}$$

где r — активное сопротивление цепи заряда Ак; C — емкость Ак; U_C — напряжение на Ак.

В (12) запишем $\sin(2\omega t - \pi/2) = \cos 2\omega t$. Тогда изображение Карсона, соответствующее (12), имеет вид

$$\frac{4U_a}{\pi}\left\{\frac{\alpha}{p+\alpha}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{p^2}{p^2 + 4\omega^2}\right) + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega_k^2}\right\} = \frac{1}{\delta}(p+\delta)U_C(p), \tag{13}$$

где $p = d/dt$ — оператор; $U_C(p)$ — изображение Карсона оригинала $U_C(t)$; $\delta = 1/(rC)$ — коэффициент затухания цепи заряда Ак.

Из (13) получаем

$$U_C(p) = \frac{4\delta U_a}{\pi}\frac{1}{p+\delta}\left\{\frac{\alpha}{p+\alpha}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{p^2}{p^2 + 4\omega^2}\right) + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega_k^2}\right\}. \tag{14}$$

Используя таблицы [8] на основе (14), определим оригинал $U_C(t)$ в виде

$$\begin{aligned} U_C(t) = \frac{4\delta U_a}{\pi}\Bigg\langle & \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\alpha - \delta}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\right)\right] - \\ & - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\delta^2 + 4\omega^2}(-\delta e^{-\delta t} + \delta\cos 2\omega t + 2\omega\sin 2\omega t)\right] + \\ & + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\frac{\alpha}{(\alpha - \delta)^2 + \omega_k^2}\left\{e^{-\delta t} + \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t - (\alpha - \delta)\sin\omega_k t]\right\} + \\ & + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\frac{\alpha}{(\alpha - \delta)^2 + \omega_k^2}\left\{-\delta e^{-\delta t} + \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_k}[\omega_k\delta\cos\omega_k t + (\omega_k^2 + \alpha^2 - \alpha\delta)\sin\omega_k t]\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

В (15) сгруппируем однородные члены. Тогда получим

$$U_C(t) = \frac{2U_a}{\pi} - \frac{4\delta U_a}{\pi \cdot 3} \frac{1}{\delta^2 + \omega^2} (\delta \cos 2\omega t + 2\omega \sin 2\omega t) +$$
$$+ \frac{4\delta U_a}{\pi} e^{-\delta t} \left[-\frac{1}{(\alpha - \delta)\delta} + \frac{1}{3} \frac{1}{\delta^2 + 4\omega^2} + \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(\alpha - \delta)^2 + \omega_k^2} (1 - \alpha\delta) \right] +$$
$$+ \frac{4\delta U_a}{\pi} e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} \left[\omega_k \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cos_k t + (\omega_k^2 + \alpha^2 - \alpha\delta - \alpha + \delta) \sin \omega_k t \right] \times$$
$$\times U_{ak} \frac{\alpha}{(\alpha - \delta)^2 + \omega_k^2}. \tag{16}$$

Как видно из (16), слагаемые с $e^{-\delta t}$ и $e^{-\alpha t}$ затухают, причем так как $\alpha \to \infty$, то слагаемое с $e^{-\alpha t}$ затухает очень быстро. Гармонические составляющие с $\cos 2\omega t$ и $\sin 2\omega t$, проходя через Ак, заряжают и разряжают его, обеспечивая деполяризацию в Ак, что, в принципе, необходимо. Постоянная составляющая $2U_a/\pi$ равна среднему значению двухполупериодного выпрямленного однофазного напряжения, что обусловливает заряд Ак до этого напряжения.

Таким образом, видим, что данное исследование, использующее Фурье-комбинированное сингуларисное разложение несинусоидальных функций, полностью соответствует в своем результате по заряду аккумулятора классическому решению подобной задачи.

1. *Божко О. Є., Личкатий Є. А., Тертишний І. С.* Пристрій для заряду акумуляторної батареї / Патент України № 14869А, GH 02 J 7/10. Бюл. № 3. – 30.06.97. – 5 с.
2. *Божко О. Є., Личкатий Є. А., Тертишний І. С.* Пристрій для заряду акумуляторної батареї / Патент України № 14882А, GH 02 J 7/10. Бюл. № 4. – 18.02.97. – 5 с.
3. *Божко А. Е., Личкатый Е. А., Попов С. Г.* Основные принципы построения устройств для заряда аккумуляторов и их реализация // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2007. – № 3(9). – С. 59–63.
4. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
5. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.
6. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электроцепях переменного тока // Доп. НАН України. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
7. *Божко А. Е.* О сингуларисном разложении скачкообразной функции // Там само. – 2008. – № 2. – С. 42–47.
8. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 22.07.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the Fourier combined singularisnal process for charging an accumulator

The problem of determination of the accumulator voltage at its charging with the help of the Fourier-combined singularisnal voltage is solved.