Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.96

Я. М. Дрінь

Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Досліджуються структура та властивості фундаментального розв'язку m-точкової задачі ($m \geqslant 3$) для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним оператором. Встановлюється коректна розв'язність вказаної задачі в класі крайових умов, які є узагальненими функціями типу розподілів. Доведено, що розв'язок m-точкової задачі має властивість локалізації.

Серед еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами (ПДО) важливе місце займають рівняння з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Такі рівняння виникають при моделюванні різних реальних процесів, мають важливі застосування в теорії випадкових процесів, теорії фракталів та ін. [1, 2]. Серед задач для таких рівнянь найбільше досліджувалася задача Коші (С. Д. Ейдельман і Я. М. Дрінь визначили параболічні ПДО з негладкими символами і розпочали дослідження задачі Коші для них, А. Н. Кочубей вперше трактував ПДО як гіперсингулярні оператори і отримав завершені результати, її досліджували також В. В. Городецький, В. А. Літовченко, М. В. Федорюк, Ю. А. Дубінський та ін.). Отримано важливі результати щодо коректної розв'язності цієї задачі в різних функціональних просторах, властивостей її розв'язків, зокрема інтегральних зображень, поведінки розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємності та стабілізації за Ляпуновим. У той же час треба зазначити, що теорія крайових задач для таких рівнянь майже не розвинена. У цьому напрямку відзначимо працю [3], в якій знайдено формулу та оцінки ядра Пуассона однієї крайової задачі в півпросторі за просторовими змінними x_1, x_2, $\ldots$, x_n, у рівняння і крайову умову якої входять оператор диференціювання за нормальною змінною x_n та ПДО за дотичними змінними $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

У даній роботі досліджується m-точкова задача ($m \geqslant 3$) для еволюційного рівняння з ПДО, побудованим за негладким однорідним символом, не залежним від просторових змінних, та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцією скінченного порядку. Двоточкова задача ($m = 2$) для такого рівняння досліджена в [4]. Зазначимо, що в даній роботі при дослідженні властивостей фундаментального розв'язку m-точкової задачі ($m \geqslant 3$) використовується методика, відмінна від застосованої в праці [4] (методика, розвинена в [4], застосовна лише у випадку двоточкової задачі).

Простори основних та узагальнених функцій. Нехай $\gamma \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, $\gamma_0 = n + [\gamma]$, $[\gamma]$ — ціла частина γ, $M(x) = 1 + \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \forall\, p \in \mathbb{Z}_+ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right\} < +\infty \right\}$$

(тут $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультиіндекс). Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi, \qquad p \in \mathbb{Z}_+,$$

при цьому Φ перетворюється в повний досконалий зліченно-нормований простір [5]. Збіжність у просторі Φ можна охарактеризувати ще й так [5]: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ до функції $\varphi \in \Phi$ тоді й лише тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists\, c = c(\varphi) > 0 \qquad \forall\, \nu \geqslant 1\colon \;\; \|\varphi_\nu\|_p \leqslant c;$$

2) правильно збігається в Φ, а саме: для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geqslant 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$.

У просторі Φ визначені і неперервні операції зсуву аргументу, диференціювання, а також операція перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \varphi(x), dx, \qquad \varphi \in \Phi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

при цьому $F[\varphi]$ — обмежена, неперервна на $\mathbb{R}^n$ і нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функція, яка задовольняє умову

$$\forall\, \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \qquad k_i \geqslant m_i, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \exists\, c_k > 0 \;\, \exists\, c_m > 0 :$$
$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |\xi^k D_\xi^m F[\varphi](\xi)| \leqslant c_k \cdot c_m,$$

де $c_k \leqslant c A_1^{k_1} \cdots A_n^{k_n} k_1^{k_1} \cdots k_n^{k_n}$, а c, $A_1, \ldots, A_n$ — додатні сталі, залежні лише від функції $F[\varphi]$ [5]. У функцій $\dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\xi_i \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{\xi_i \to +0} \dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\lim\limits_{\xi_i \to -0} \dfrac{\partial^k F[\varphi]}{\partial \xi_i^k}$, $\varphi \in \Phi$. У просторі $\Psi := F[\Phi]$ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм [5]:

$$\|\Psi\|_p := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{|k|=0}^{p} |\xi^k D_\xi^k \psi(\xi)| \right\}, \qquad \psi \in \Psi, \qquad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Перетворення Фур'є взаємно однозначно і взаємно неперервно відображає Φ на Ψ.

Символом Φ' позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. У праці [5] наведено три достатні ознаки існування згортки в Φ'. Наведемо одну з них: якщо $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, то згортка $f * \varphi$ існує і визначається формулою

$$f * \varphi = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \qquad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi), \qquad \varphi \in \Phi,$$

де T_{-x} — оператор зсуву аргументу: $T_{-x}\varphi(\xi) = \varphi(\xi - x)$. Зазначимо, що $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною функцією [5].

Нехай $f \in \Phi'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi$ для довільної функції $\varphi \in \Phi$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі Φ, то функціонал f називається згортувачем у просторі Φ.

Оскільки $F[\psi] \in \Phi$, якщо $\psi \in \Psi$ ($F[\psi](x) = (2\pi)^n F^{-1}[\psi(-x)] \in \Phi$), то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle, \qquad \forall\, \psi \in \Psi.$$

Із властивості лінійності й неперервності функціонала f та перетворення Фур'є основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$ на просторі Ψ. Для перетворення Фур'є узагальнених функцій з простору Φ' правильним є таке твердження: якщо узагальнена функція $f \in \Phi'$ є згортувачем у просторі Φ, то для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ вірною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$.

Основні результати. Нехай $a\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ неперервна на $\mathbb{R}^n$ функція додатно однорідна порядку γ (тобто $a(\lambda x) = \lambda^\gamma a(x)$, $\lambda > 0$, $\gamma \in (1, +\infty \setminus \{2, 3, 4, \ldots\})$, яка нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ і задовольняє умови:

1) $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists\, c_\alpha > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon |D_x^\alpha a(x)| \leqslant c_\alpha \|x\|^{\gamma - |\alpha|}$;

2) $\exists\, \widetilde{\delta} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\colon a(x) \geqslant \widetilde{\delta}\|x\|^\gamma$.

З результатів, наведених у [4], випливає, що ПДО $A_\gamma := F^{-1}[aF]$ визначений і є неперервним у просторі Φ.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_\gamma u = 0, \qquad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi, \tag{1}$$

задамо багатоточкові умови

$$\mu u(t, \cdot)\big|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)\big|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t, \cdot)\big|_{t=t_m} = \varphi, \tag{2}$$

де $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m$ — невід'ємні числа, $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, $\varphi \in \Phi'_*$. Тут символом Φ'_* позначено клас узагальнених функцій з простору Φ', які є згортувачами у просторі Φ. Під розв'язком задачі (1), (2) розумітимемо розв'язок $u(t, \cdot) \in C^1((0, T), \Phi)$ рівняння (1), який задовольняє умову (2) в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, \cdot) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m - 0} u(t, \cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються в просторі Φ'.

При дослідженні задачі (1), (2) важливу роль відіграють функції

$$Q(t, \sigma) = \exp\{-t a(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1}, \qquad t \in (0, T), \qquad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Gamma(t,x) := F^{-1}[Q(t,\sigma)](x), \qquad t \in (0,T), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

властивості яких сформулюємо у вигляді лем 1–4.

Лема 1. *При фіксованому $t > 0$ функція $Q(t,\sigma)$ нескінченно диференційовна за $\sigma \in \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ і для її похідних справджуються оцінки*

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leqslant \gamma_s \varphi_s \exp\{-ta(\sigma)\} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|^{\omega_i}, \qquad s = (s_1,\ldots,s_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{3}$$

$\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_i \neq 0$, $i = \{1,\ldots,n\}$, $\gamma_s > 0$ *— стала, не залежна від* t, $\varphi_s(t) = \sum\limits_{p=0}^{|s|} t^p$,

$$\omega_i = \begin{cases} s_i, & \text{якщо} \quad |\sigma_i| \geqslant 1, \ i \in \{1,\ldots,n\}, \\ \gamma - s_i, & \text{якщо} \quad |\sigma_i| < 1, \ \sigma_i \neq 0, \ i \in \{1,\ldots,n\}. \end{cases}$$

З оцінок (3) випливає, що $Q(t,\sigma)$, як функція аргументу σ, при кожному $t > 0$ є елементом простору Ψ. Тоді функція $\Gamma(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, як функція x, є елементом простору $\Psi = F^{-1}[\Psi]$ (при кожному $t > 0$).

Лема 2. *Для функції Γ та її похідних правильними є оцінки*

$$|D_x^k \Gamma(t,x)| \leqslant c_k t^{-([\gamma](\gamma-1)+\gamma(n-1))/\gamma - |k|}(1 + \|x\|)^{-(n+[\gamma]+|k|)},$$

$k = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $t \in (0,T)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *стала* $c_k > 0$ *не залежить від* t.

Лема 3. *Функція $\Gamma(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі Φ, диференційовна за t (про абстрактні функції див. [6, с. 94–100]).*

Як наслідок, з леми 3 дістаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * \Gamma)(t,\cdot) = f * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\cdot), \qquad \forall\, f \in \Phi', t \in (0,T].$$

Лема 4. *У просторі Φ' вірними є такі границі:*

1) $\lim\limits_{t\to+0} \Gamma(t,\cdot) = \dfrac{\delta}{\mu - \mu_0}$, $\mu_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$;

2) $\mu \lim\limits_{t\to+0} \Gamma(t,\cdot) - \mu_1 \lim\limits_{t\to t_1} \Gamma(t,\cdot) - \mu_m \lim\limits_{t\to t_m-0} \Gamma(t,\cdot) = \delta$

(тут δ — дельта-функція Дірака).

Зазначимо також, що $\Gamma(t,x)$ задовольняє рівняння (1). Урахувавши властивості функції Γ, цю функцію називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі (1), (2) (ФРБЗ).

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій Φ'_*. Розв'язок записується у вигляді згортки:*

$$u(t,x) = (\varphi * \Gamma)(t,x), \qquad \varphi \in \Phi'_*, \qquad (t,x) \in \Pi,$$

де Γ — ФРБЗ (1), (2).

Оскільки гранична узагальнена функція φ є згортувачем у просторі Φ, а $\Gamma(t,\cdot)$, $t \in \in (0,T]$, — неперервна абстрактна функція параметра $t \in (0,T]$ зі значеннями в просторі ϕ, то розв'язок m-точкової задачі (1), (2) ($m \geqslant 3$) задовольняє граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = (\varphi * \Gamma)(t,\cdot) \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} (\varphi * \Gamma)(t_i,\cdot) = u(t_i,\cdot), \qquad t_i \in (0,T],$$

$i \in \{1, \ldots, m\}$, у просторі Φ. З урахуванням топології простору Ψ звідси, зокрема, дістаємо, що $u(t, \cdot) \to u(t_i, \cdot)$ при $t \to t_i$, $t_i \in (0, T]$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$. У той же час точка $t = 0$ є особливою для функції $\Gamma(t, \cdot)$. З леми 4 випливає, що

$$u(t, \cdot) = (\varphi * \Gamma)(t, \cdot) \underset{t \to +0}{\longrightarrow} \varphi * \frac{\delta}{\mu - \mu_0} = \frac{\varphi}{\mu - \mu_0},$$

причому вказане граничне співвідношення виконується в просторі Φ'. З'ясуємо, за яких обмежень на граничну функцію $\varphi \in \Phi'_*$ можна отримати локальне покращення збіжності згортки $(\varphi * \Gamma)(t, \cdot)$ при $t \to +0$.

Введемо позначення: Φ_0 — поповнення Φ за нормою $\| \cdot \|_0$, $\Phi'_{0,*}$ — сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ'_0, які є згортувачами в просторі Φ_0.

Теорема 2. *Нехай $\varphi \in \Phi'_{0,*}$, $u(t, x)$ — розв'язок задачі* (1), (2) *з граничною функцією φ. Якщо $\varphi = 0$ в області $Q \subset \mathbb{R}^n$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, x) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, x) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m - 0} u(t, x) = 0$$

справджується рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Позначимо через M_Φ клас мультиплікаторів у просторі Φ.

Наслідок *(властивість локалізації). Нехай $\varphi \in \Phi'_{0,*}$, $u(t, x)$ — розв'язок m-точкової задачі* (1), (2) *($m \geqslant 3$) з граничною функцією φ. Якщо узагальнена функція φ збігається в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з функцією $g \in M_\Phi$, то граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, x) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, x) - \cdots - \mu_m \lim_{t \to t_m - 0} u(t, x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Зауваження. У випадку двоточкової задачі (1), (2) ($m = 2$) вказана властивість локалізації справджується для граничної функції φ, яка є елементом простору Φ'_* (див. [4]).

1. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909–934.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 205 с.
3. *Дрінь Р. Я.* Дослiження якiсних властивостей розв'язкiв параболiчних псевдодиференцiальних рiвнянь з негладкими символами: Дис. ... канд. фiз.-мат. наук. – Львiв, 1997. – 137 с.
4. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Задача Дiрiхле для одного класу еволюцiйних рiвнянь // Наук. вiсн. Чернiвецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 336–337. Математика. – Чернiвцi: Рута, 2007. – С. 63–78.
5. *Городецький В. В.* Граничнi властивостi гладких у шарi розв'язкiв рiвняння параболiчного типу. – Чернiвцi: Рута, 1998. – 225 с.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 370 с.

Буковинська державна фінансова академія, Чернівці

Надійшло до редакції 24.11.2009

Ya. M. Drin'

A multipoint problem for evolution pseudodifferential equations

The structure and properties of the fundamental solution of an m-point problem ($m \geqslant 3$) for the evolution equation with a pseudodifferential operator are investigated. The correct solvability of this problem is established in the class of boundary conditions which are generalized functions of the distribution type. A localization theorem on the solution of the m-pointed problem is proved.