УДК 519.859

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник**

Комбинаторные виды для перечисления комбинаторных конфигураций со специальными свойствами

Розглянуто задачу побудови комбінаторних видів для перерахування композиційних k-образів комбінаторних множин, які формуються на основі описів базових комбінаторних множин та запропонованих відображень. Наводиться загальний підхід до побудови комбінаторних видів та пов'язаних з ними твірних рядів для даного класу комбінаторних множин. Будується комбінаторний вид і пов'язаний з ним твірний ряд композиції перестановок.

Математическое моделирование многих задач, имеющих комбинаторную структуру, требует использования новых классов комбинаторных множеств. Применение классических подходов к описанию и генерации элементов комбинаторных множеств в реальных задачах приводит к громоздким результатам, неприменимым на практике [1]. Как следствие, возникает необходимость разработки конструктивных средств описания классов комбинаторных множеств, обладающих требуемыми свойствами.

Процесс решения задачи построения комбинаторных множеств, имеющих сложную комбинаторную структуру, можно разделить на два этапа. Первый этап представляет собой описание и генерацию элементов комбинаторного множества, обладающего заданными свойствами. Второй этап состоит в решении перечислительной задачи — подсчете всех элементов комбинаторного множества.

Один из способов решения задачи на первом этапе основан на применении концепции композиционных k-образов комбинаторных множеств — комбинаторных множеств, построенных на основе базовых комбинаторных множеств и заданных на них операций [2]. Второй этап решения задачи может быть выполнен методами перечислительной комбинаторики [3]. Современным средством решения перечислительных задач для дискретных структур, в том числе и для комбинаторных множеств, является теория комбинаторных видов [4].

Целью настоящей работы является построение комбинаторных видов для перечисления композиционных k-образов комбинаторных множеств (см. также [2]). В работе использованы понятия и терминология теории комбинаторных видов, приведенные в [4, 5].

Пусть $z^\beta = \{z_1^\beta, z_2^\beta, \ldots, z_{n_\beta}^\beta\} \subseteq \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\beta}_i}$, $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\beta}_i}$ — множества произвольных элементов, $\beta \in \boldsymbol{\beta}_i$, $i \in J_k^0 = \{0, 1, \ldots, k\}$, где $\boldsymbol{\beta}_0 = \{0\}$,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\beta}_i = \{\beta_j, j = 1, 2, \ldots, \eta_i\}, \qquad \beta_j = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i), \\ &\alpha_1 \in J_n, \qquad \alpha_2 \in J_{n_{\alpha_1}}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_i \in J_{n_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}}}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\eta_1 = n, \qquad \eta_2 = \sum_{j=1}^{n} n_j, \qquad \eta_i = \sum_{\alpha_1=1}^{n} \sum_{\alpha_2=1}^{n_1} \cdots \sum_{\alpha_{i-1}=1}^{n_{1\ldots i-2}} n_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}}, \qquad i = 3, 4, \ldots, k. \tag{2}$$

Рассмотрим отображения

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}_0}\colon \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\beta}_0} \to \boldsymbol{Y}^0, \qquad \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}_i}\colon \boldsymbol{Y}^{i-1} \times \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\beta}_i} \to \boldsymbol{Y}^i,$$

где

$$\boldsymbol{Y}^0 = \{Y_{\boldsymbol{\beta}_0}(z^\beta), \beta \in \boldsymbol{\beta}_0\}, \quad \boldsymbol{Y}^i = \{Y_{\boldsymbol{\beta}_i}(Y_{\boldsymbol{\beta}_{i-1}}, z^\beta), \beta \in \boldsymbol{\beta}_i\}, \quad i \in J_k, \quad J_t = \{1, 2, \ldots, t\},$$

$$Y_{\boldsymbol{\beta}_i} = \boldsymbol{\Gamma}_{\beta_i}(Y_{\boldsymbol{\beta}_{i-1}}, z^{\boldsymbol{\beta}_i}) = F(Y_{\boldsymbol{\beta}_{i-1}}, \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{\beta}_i}(z^{\boldsymbol{\beta}_i})), \qquad i \in J_k, \qquad F(Y_{\boldsymbol{\beta}_{i-1}}, \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{\beta}_i}(z^{\boldsymbol{\beta}_i})) -$$

отображение, реализующее операцию n-замещения, которая состоит в замене каждого порождающего элемента множества $Y_{\boldsymbol{\beta}_{i-1}}$ элементами базовых комбинаторных множеств $Y_\beta = \widetilde{\Gamma}_\beta(z^\beta)$, $\beta \in \boldsymbol{\beta}_i$, соответственно,

$$\widetilde{\Gamma}_{\boldsymbol{\beta}_i}(z^{\boldsymbol{\beta}_i}) = (\widetilde{\Gamma}_\beta(z^\beta), \beta \in \boldsymbol{\beta}_i), \qquad z^{\boldsymbol{\beta}_i} = (z^\beta, \beta \in \boldsymbol{\beta}_i), \qquad \widetilde{\Gamma}_\beta(z^\beta) -$$

базовые отображения [2]. Это означает, что

$$(z^\beta_{l_1}, z^\beta_{l_2}, \ldots, z^\beta_{l_\beta}) \in Y_\beta, \qquad z^\beta_{l_t} \in Y_\delta, \qquad l_t \in J_{l_\beta}, \qquad \beta \in \boldsymbol{\beta}_{i-1}, \qquad \delta \in \boldsymbol{\beta}_i, \qquad i \in J_k.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \{\Gamma_{\boldsymbol{\beta}_i}\}, \qquad i \in J_k. \tag{3}$$

Пусть $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ — многосортное множество [4], где $U_i = z^i = \{z^i_1, z^i_2, \ldots, z^i_{n_i}\}$, $i \in J_n$. Определим многосортный вид [4] $S^0(U)$, где U — основное множество, и односортные виды [4] $S^i(U_i)$, основными множествами которых являются U_i, $i \in J_n$.

Пусть

$$\overline{S}^i(U) = S^i(U_i), \qquad i \in J_n, \tag{4}$$

где $\overline{S}^i(U)$ — многосортный вид, U — его основное множество.

Рассмотрим многосортный вид $SW_N(U)$, $N = \sum\limits_{i=1}^n n_i$, построенный из $S^0(U)$ и $\overline{S}^i(U)$ типа (5) с помощью операции функториальной композиции [4, 5]:

$$SW_N(U) = S^0 \Box (\overline{S}^1, \overline{S}^2, \ldots, \overline{S}^n)[U_1, U_2, \ldots, U_n] = S^0 \Box (\overline{S}^1(U), \overline{S}^2(U), \ldots, \overline{S}^n(U)). \tag{5}$$

Вид $SW_N(U)$ типа (5) представляет собой вид композиционного k-образа комбинаторных множеств [2] при $k = 1$. Здесь под композиционным k-образом комбинаторных множеств Y_0, Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_n, Y_{11}, Y_{12}, $\ldots$, Y_{1n_1}, $\ldots$, $Y_{\underbrace{1\ldots1}_k}$, $\ldots$, $Y_{nn_1\ldots n_{k-1}}$, порожденным множествами z^{β_k}, $\beta_k \in \boldsymbol{\beta}_k$, понимается комбинаторное множество вида [2]

$$W_z = \Gamma_k \circ \Gamma_{k-1} \circ \cdots \circ \Gamma_0(z), \tag{6}$$

где отображения $\Gamma_i \in \boldsymbol{\Gamma}_i$, $i \in J_k$, определяются соотношением (3).

Получим обобщение комбинаторного вида $SW_N(U) = SW^1_N(U)$ типа (5) для произвольного конечного натурального $k > 1$.

Рассмотрим виды S^{11}, $S^{12}, \ldots, S^{1n_1}$; S^{21}, $S^{22}, \ldots, S^{2n_2}$; $\ldots$; S^{n1}, $S^{n2}, \ldots, S^{nn_n}$. Основными множествами этих видов являются $U_{ij} = z^{ij}$: $U_{11} = \{z^{11}_1, z^{11}_2, \ldots, z^{11}_{n_{11}}\}$, $U_{12} = \{z^{12}_1, z^{12}_2, \ldots, z^{12}_{n_{12}}\}$, $\ldots$, $U_{nn_n} = \{z^{nn_n}_1, z^{nn_n}_2, \ldots, z^{nn_n}_{n_{nn_n}}\}$.

Аналогично видам $\overline{S}^i(U)$ определим комбинаторные виды $\overline{S}^{ij}(U_i)$ следующим образом: $\overline{S}^{ij}(U_i) = S^{ij}(U_{ij})$, $j \in J_{n_i}$, где $U_i = (U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in_i})$, $i \in J_n$. Используя операцию функториальной композиции, построим виды $SW_N^2(U)$:

$$SW_N^2 = SW_N^1 \square (\overline{S}^{11}, \overline{S}^{12}, \ldots, \overline{S}^{nn_n})[U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{nn_n}].$$

$SW_N^2(U)$ являются видами комбинаторных множеств W_z типа (6) при $k = 2$.

Продолжая процесс построения комбинаторных видов для произвольного k, определим комбинаторные виды $SW_N^k(U)$ следующим образом:

$$SW_N^k(U) =$$
$$= SW_N^{k-1} \square (\overline{S}^{\overbrace{11\ldots1}^{k}}, \ldots, \overline{S}^{nn_{\alpha_1} n_{\alpha_1\alpha_2} \ldots n_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}})[U_{\underbrace{11\ldots1}_{k}}, \ldots, U_{nn_{\alpha_1} n_{\alpha_1\alpha_2} \ldots n_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}]. \qquad (7)$$

Здесь $\overline{S}^{\overbrace{11\ldots1}^{k}}, \ldots, \overline{S}^{nn_{\alpha_1} n_{\alpha_1\alpha_2} \ldots n_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}$ — многосортные виды, которые определяются как

$$\overline{S}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(U_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}) = S^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(U_{\alpha_1\ldots\alpha_k}),$$

где $U_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} = (U_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1}, U_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}2}, \ldots, U_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}n_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}})$; $S^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ — заданные односортные виды; $U_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = z^{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ определяются из (1), (2).

Таким образом, $SW_N^k(U)$ — вид комбинаторных множеств W_z типа (6) при произвольном натуральном k.

Построенные комбинаторные виды $SW_N^k(U)$ позволяют решать перечислительные задачи для различных классов композиционных k-образов комбинаторных множеств. С этой целью используем производящие ряды видов структур [4, 5] для базовых комбинаторных множеств и производящие ряды, связанные с результатами операций над базовыми комбинаторными множествами.

Для построения производящего ряда, связанного с комбинаторным видом $SW_N^k(U)$, используем следующие выражения. Производящие ряды, связанные с многосортными видами $S^0(U)$ и $\overline{S}^i(U) = S^i(U_i)$, $i \in J_n$, типа (4), можно представить как [4]

$$F_{S^0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_n \geqslant 0} |F_{S^0}(n_1, n_2, \ldots, n_n)| \frac{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{n_n}}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_n!}, \qquad (8)$$

$$F_{\overline{S}^i}(y_1^i, y_2^i, \ldots, y_n^i) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_n \geqslant 0} |F_{\overline{S}^i}(n_1, n_2, \ldots, n_n)| \frac{(y_1^i)^{n_1} \cdot (y_2^i)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (y_n^i)^{n_n}}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_n!}, \qquad (9)$$

где $|F_{S^0}(n_1, n_2, \ldots, n_n)|$ и $|F_{\overline{S}^i}(n_1, n_2, \ldots, n_n)|$ — количества $S^0(U)$- и $\overline{S}^i(U)$-структур, $n_i = |U_i|$, $i \in J_n$, соответственно.

Производящий ряд, связанный с комбинаторным видом $SW_N^1(U)$ как функториальной композицией n-сортных видов $S^0(U)$ и $\overline{S}^i(U)$, $i \in J_n$, определяется как [4]

$$F_{SW_N^1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_n \geqslant 0} |F_{SW_N}(n_1, n_2, \ldots, n_n)| \frac{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{n_n}}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_n!}, \qquad (10)$$

где $|F_{SW_N^1}(n_1, n_2, \ldots, n_n)| = |S^0 \square (\overline{S}^1, \overline{S}^2, \ldots, \overline{S}^n)[U_1, U_2, \ldots, U_n]| = |S^0(\overline{S}^1, \overline{S}^2, \ldots, \overline{S}^n)|$ — количество $SW_N^1(U)$-структур.

Количество $SW_N^1(U)$-структур зависит от комбинаторных видов $S^0(U)$, $\overline{S}^i(U)$ и мощности их основных множеств. Его можно вычислить для конкретных реализаций комбинаторного вида $SW_N^1(U)$. Построение производящего ряда, связанного с комбинаторным видом $SW_N^k(U)$ типа (7), состоит в рекуррентном применении выражений (8), (9) с учетом мощности основных множеств комбинаторных видов.

Пример. Рассмотрим построение комбинаторного вида композиции перестановок [2]. Пусть P_{nt} — множество перестановок n элементов, t из которых различны. Композиционный k-образ комбинаторных множеств P_{nt}; $P_{m_1k_1}$, $P_{m_2k_2}$, $\ldots$, $P_{m_nk_n}$, порожденный множествами $U_1 = \{b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{m_1}^1\}$, $U_2 = \{b_1^2, b_2^2, \ldots, b_{m_2}^2\}$, $\ldots$, $U_n = \{b_1^n, b_2^n, \ldots, b_{m_n}^n\}$, $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$, называется композицией перестановок и обозначается $W_P = W_P(N, m_1, m_2, \ldots, m_n)$. W_P состоит из элементов $w = (\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n) \in W_P$, где $\overline{w}_i = (b_{s_1}^j, b_{s_2}^j, \ldots, b_{s_{m_j}}^j)$, $i \in J_{m_i}$, $j \in J_n$. В множестве $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n\}$ t элементов различны, k_j элементов среди $b_{s_1}^j$, $b_{s_2}^j, \ldots, b_{s_{m_j}}^j$ различны. Последовательность $(s_1, s_2, \ldots, s_{m_j}) \in L_{m_j}$, где L_k — множество различных перестановок элементов индексного множества J_k.

Комбинаторный вид композиции перестановок при $n = t$ обозначим $VW_P(U) = VW_P(U, N, n_1, n_2, \ldots, n_n)$. Построение $VW_P(U)$ и связанного с ним производящего ряда F_{VW_P} выполним на основе выражений (5) и (10). В результате получим

$$VW_P(U) = SP_n \square (\overline{SP}_n^1, \overline{SP}_n^2, \ldots, \overline{SP}_n^n)[U_1, U_2, \ldots, U_n],$$

где $\overline{SP}_n^i(U)$ — n-сортный вид перестановок, $\overline{SP}_n^i(U) = SP(U_i)$, $SP(U_i)$ — односортный вид перестановок, $i \in J_n$. Производящий ряд, связанный с видом $VW_P(U)$, представляется как

$$F_{VW_P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n \geqslant 0} m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n! \cdot n! \cdot \frac{x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n}}{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!} =$$
$$= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n \geqslant 0} n! \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n}.$$

В соответствии с производящим рядом количество элементов множества W_P при $n = t$, $m_i = k_i$, $i \in J_n$, равно $\operatorname{Card} W_P = m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n! \cdot n!$.

Таким образом, построение комбинаторных видов для композиционных k-образов комбинаторных множеств позволяет эффективно решать задачи перечисления новых классов комбинаторных множеств с помощью современных средств дискретной математики — теории комбинаторных видов.

1. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. – Москва: Наука, 1977. – 320 с.
2. *Стоян Ю. Г., Гребенник И. В.* Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений // Доп. НАН України. – 2008. – № 10. – С. 28–31.
3. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. – Москва: Мир, 1990. – 440 с.
4. *Bergeron F., Labelle G., Leroux P.* Combinatorial species and tree-like structures. – Cambridge: University Press, 1998. – 457 p.
5. *Bergeron F., Labelle G., Leroux P.* Introduction to the theory of species of structures. – Montréal: University of Québec, 2008. – 133 p.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступило в редакцию 03.12.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, I. V. Grebennik**

Combinatorial species for enumeration of combinatorial configurations having special properties

The problem of construction of combinatorial species for the enumeration of composition k-images of combinatorial sets which are based on primary combinatorial sets and proposed mappings is considered. A general approach to the construction of the combinatorial species and associated generating series for the class of combinatorial sets is given. A combinatorial species and the associated generating series of a composition of permutations are built.