ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2010

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.85

Н. И. Гиль, Т. Е. Романова, М. В. Злотник

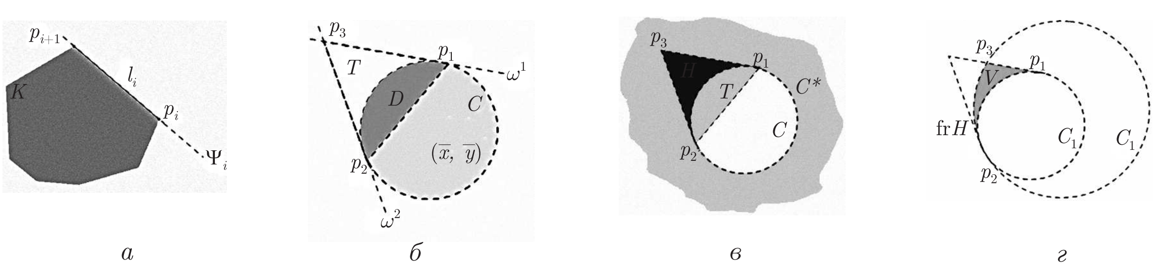
Декомпозиция двумерных геометрических объектов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

Розглядається алгоритм, що реалізує декомпозицію довільних двовимірних φ-об'єктів, межа яких утворена об'єднанням дуг кіл та відрізків прямих. Запропонований підхід є ефективним для побудови Ф-функцій складених φ-об'єктів при математичному моделюванні задач геометричного проектування. Алгоритм грунтується на виділенні класу базових φ-об'єктів, для яких відомі Ф-функції. Наведено результати чисельних експериментів.

В классе оптимизационных 2D задач упаковки и раскроя (Packing and Cutting) [1] конструктивным средством математического моделирования отношений геометрических объектов является метод Ф-функций [2]. В работах [3–6] построены Ф-функции для примитивных объектов (primary objects) и некоторых классов составных объектов (composed objects). Построение Ф-функций для произвольных φ-объектов [4], граница которых формируется объединением дуг окружностей и отрезков прямых, можно реализовать, используя чрезвычайно простую идею о представлении произвольного φ-объекта в виде объединения объектов (далее — базовых объектов), для которых Ф-функции известны.

В пределах данного исследования в качестве базовых рассматриваются следующие объекты: выпуклый многоугольник K (рис. 1, *а*), заданный вершинами $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$; круговой сегмент $D = T \bigcap C$ (рис. 1, *б*), где C — круг радиусом r с центром $O(\overline{x}, \overline{y})$, $O \notin D$; T — треугольник, заданный вершинами p_1, p_2, p_3, где $p_3 = \omega^1 \bigcap \omega^2$, ω^1 и ω^2 — касательные



а *б* *в* *г*

Рис. 1. Базовые объекты K, D, H, V

к окружности $\mathrm{fr}\, C$ в точках p_1 и p_2 соответственно; $\mathrm{fr}(\cdot)$ — граница множества $(\cdot)$; объект $H = T \bigcap C^*$ (рис. 1, *в*), $C^* = R^2 \setminus \mathrm{int}\, C$, где $\mathrm{int}(\cdot)$ — внутренность множества $(\cdot)$; объект $V = H \bigcap C_2$ (рис. 1, *г*), где $H = T \bigcap C_1^*$, C_2 — круг радиусом $r_2 > r_1$ с центром в точке O_2, при этом $\Phi^{C^*C} = 0$; Φ^{C^*C} — Φ-функция C_2^* и C_1.

Обоснованием выбора в качестве базовых объектов K, D, H, V является следующее утверждение.

Теорема. *Ограниченный φ-объект $A \subset R^2$, граница которого формируется объединением отрезков прямых и дуг окружностей, всегда можно представить в виде*

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \tag{1}$$

где $\mathrm{int}\, A_i \bigcap \mathrm{int}\, A_j = \varnothing$, *$i, j \in I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $i \neq j$, $A_k \in \{K, D, H, V\}$.*

Задача. Необходимо представить ограниченный φ-объект $A \subset R^2$, граница которого состоит из отрезков прямых и дуг окружностей в виде (1).

Пусть A — односвязный ограниченный φ-объект, граница которого задана последовательностью элементов l_i, $i \in I_n$. Каждый элемент l_i задается кортежем информации $g_i = (p_i, \lambda_i, \overline{p}_i, p_{i+1})$ об отрезке $\overline{s}$, "выпуклой" дуге $\widehat{a}$ либо "вогнутой" дуге $\breve{a}$. Дуга $\mathrm{arc}(p_1, p_2)$ на рис. 1, *б* — "выпуклая", а на рис. 1, *в* — "вогнутая". Здесь $p_i = (x_i, y_i)$, x_i, y_i — координаты начала элемента $l_i \in \{\overline{s}, \widehat{a}, \breve{a}\}$ в собственной системе координат множества A; λ_i — признак элемента l_i, причем $\lambda_i = 0$, если $l_i \in \{\overline{s}\}$, $\lambda_i = 1$, если $l_i \in \{\widehat{a}\}$, $\lambda_i = -1$, если $l_i \in \{\breve{a}\}$; $\overline{p}_i = (\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ — координаты центра отрезка $\overline{s}$ или центра окружности, формирующей дугу $\widehat{a}$ $(\breve{a})$; $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, x_{i+1}, y_{i+1} — координаты конца l_i и начала l_{i+1}.

Таким образом, информация о границе базового объекта A задается кортежем $g^A = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, в том числе $g^K = (g^{\overline{s}_1}, g^{\overline{s}_2}, \ldots, g^{\overline{s}_k})$, $g^D = (g^{\widehat{a}}, g^{\overline{s}})$, $g^H = (g^{\breve{a}}, g^{\overline{s}_1}, g^{\overline{s}_2})$, $g^V = (g^{\widehat{a}}, g^{\breve{a}}, g^{\overline{s}})$ или $g^V = (g^{\widehat{a}}, g^{\breve{a}}, g^{\overline{s}})$.

Алгоритм декомпозиции множества A на базовые объекты включает в себя четыре основных этапа.

1. Выделение объектов вида V.

Формируем базовый объект V. Пусть $l^V = \widehat{a}, \breve{a}, \overline{s})$. В этом случае $g^{\widehat{a}} = (p', 1, \overline{p}_i, p_{i+1})$, $g^{\breve{a}} = (p_{i+1}, -1, \overline{p}_{i+1}, p'')$, $\overline{s} = [p'', p']$, где $\overline{s}$ — часть прямой, касательной к окружности $C \supset \breve{a}$ в точке $p'' \in l_{i+1}$; $p' \in l_i$. Если $l^V = (\breve{a}, \widehat{a}, \overline{s})$, то $g^{\breve{a}} = (p'', -1, \overline{p}_i, p_{i+1})$, $g^{\widehat{a}} = (p_{i+1}, 1, \overline{p}_{i+1}, p')$, $\overline{s} = [p'', p']$, $p'' \in l_i$ и $p' \in l_{i+1}$. После выполнения первого этапа получаем объект $A_1 = \mathrm{cl}(A \setminus \bigcup V)$, где $\mathrm{cl}(\cdot)$ — замыкание множества $(\cdot)$.

2. Выделение сегментов D.

Формируем базовый объект D, $l^D = (\widehat{a}, \overline{s})$, такой что $l_i = \widehat{a}$, при условии, что $\mathrm{int}\, D \bigcap \mathrm{fr}\, A_1 = \varnothing$ и $(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \notin D$, а дугу $\widehat{a}$ объекта A_1 заменяем соответствующей хордой $l_i = \overline{s}$. Если же $\mathrm{int}\, D \bigcap \mathrm{fr}\, A_1 \neq \varnothing$, то находим точку $p' \in l_i = \widehat{a}$, порождающую сегменты D^1 и D^2, $l^{D^1} = (\widehat{a}^1, \overline{s}^1)$, $l^{D^2} = (\widehat{a}^2, \overline{s}^2)$, где $\overline{s}^1 = [p_i, p']$, $\overline{s}^2 = [p', p_{i+1}]$, такую, что $\mathrm{int}\, D^1 \bigcap \mathrm{fr}\, A_1 = \varnothing$ и $\mathrm{int}\, D^2 \bigcap \mathrm{fr}\, A_1 = \varnothing$. В этом случае выделяем объекты D^1и D^2, а дугу l_i заменяем хордами $\overline{s}^1$и $\overline{s}^2$. Если такой точки не существует, то находим две (три и более) точки и выделяем сегменты, заменяя их в последующем соответствующими хордами. После выполнения первого и второго этапов получаем объект $A_2 = \mathrm{cl}(A_1 \setminus \bigcup D)$, граница которого состоит из элементов $l_i \in \{\overline{s}, \breve{a}\}$.

3. Выделение объектов H.

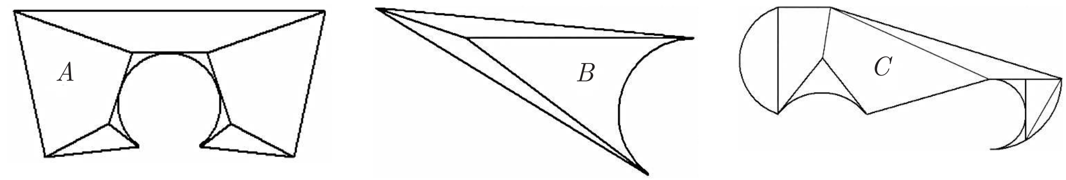


Рис. 2. Разбиение φ-объектов A, B, C на базовые объекты вида K, D, H, V

Формируем базовый объект H, $l^H = (\breve{a}, \bar{s}^1, \bar{s}^2)$, $\breve{a} = l_i$. Строим касательные ω^i и ω^{i+1} к окружности $C \supset \breve{a}$ в точках p_i, и p_{i+1}. Находим $p' = \omega^i \bigcap \omega^{i+1}$. Тогда $g^{\breve{a}} = (p_i, -1, \overline{p}_i, p_{i+1})$, $\bar{s}^1 = [p_{i+1}, p']$, $\bar{s}^2 = [p', p_i]$. Если градусная мера дуги $\breve{a} = l_i$ меньше 180° и выполняется условие $\operatorname{int} H \bigcap \operatorname{fr} A_2 = \varnothing$, то $\breve{a}$ заменяется на $\bar{s}_i = [p_i, p'] \bigcup \bar{s}_{i+1} = [p', p_{i+1}]$, формируем объект $A_2' = \operatorname{cl}(A_2 \setminus H)$. Иначе, находим точку p' — середину дуги $\breve{a}$, тогда $\breve{a} = \breve{a}^1 \bigcup \breve{a}^2$, $g^{\breve{a}^1} = (p_i, -1, \overline{p}_i, p')$ и $g^{\breve{a}^2} = (p', -1, \overline{p}_i, p_{i+1})$. Для каждой из дуг $\breve{a}^1$, $\breve{a}^2$ выполняется аналогичная процедура и т. д. Получаем множество $A_3 = \operatorname{cl}(A_2 \setminus H)$, граница которого состоит из элементов $l_i \in \{\bar{s}\}$.

4. Декомпозиция невыпуклого многоугольника A_3 на выпуклые многоугольники K.

С этой целью используется алгоритм многоугольного разбиения, приведенный в [7]. Получаем множество $A_3 = \bigcup K$.

Таким образом, имеем: $A = (\bigcup D) \bigcup (\bigcup V) \bigcup (\bigcup H) \bigcup (\bigcup K)$.

На рис. 2 приведены примеры разбиения φ-объектов A, B и C на базовые объекты вида K, D, H, V.

Пусть A — многосвязный ограниченный φ-объект. Граница A — несвязное множество, состоящее из конечного числа компонент связности (петель). Определим каждую петлю подобно тому, как задается граница односвязного множества. Затем используем алгоритм декомпозиции, приведенный выше.

С практической точки зрения класс базовых объектов может быть расширен с целью упрощения вида Ф-функции произвольных объектов, поскольку, следуя [5], Ф-функция объектов A и B вида (1) может быть определена так:

$$\Phi^{AB} = \min\{\Phi^{A_i B_j},\ i \in I_{m_A},\ j \in I_{m_B}\}.$$

Например, неразумно представлять круги в виде объединения сегментов D и многоугольников K, так как Ф-функция для кругов имеет более простой вид, чем Ф-функции для сегментов. Кроме того, вид Ф-функции для составных объектов может быть значительно упрощен, если иметь в “библиотеке” Ф-функции для φ-объектов вида $K \bigcap C^*$. В этой связи алгоритм разбиения можно модифицировать следующим образом.

Полагаем, что (1) — покрытие множества A, при котором, в общем случае, A_i и A_j могут иметь общие внутренние точки, i, $j \in I_m$, $i \neq j$. В класс базовых объектов введем дополнительно круги C, а также φ-объекты L. Объект V здесь определяется в виде: $V = C_1^* \bigcap C_2 \bigcap P$, где P — полуплоскость.

Процесс покрытия объекта A базовыми объектами из множества $\{C, D, K, L, V\}$ включает в себя три этапа.

1. Выделение объектов V. Формируем базовый объект V_i, граница которого состоит из элементов $l_{i-1} = \widehat{a}$, $l_i = \breve{a}$ (или $l_i = \widehat{a}$, $l_{i-1} = \breve{a}$) и $l'_{i+1} = \bar{s}$, где $g^{\bar{s}} = (p_{i-1}, 0, \overline{p}_i, p_{i+1})$. Отрезок l'_{i+1} делит A на два объекта: V_i и $A' = \operatorname{cl}(A \setminus V_i)$. После выполнения первого этапа отсекаются все базовые объекты вида V.

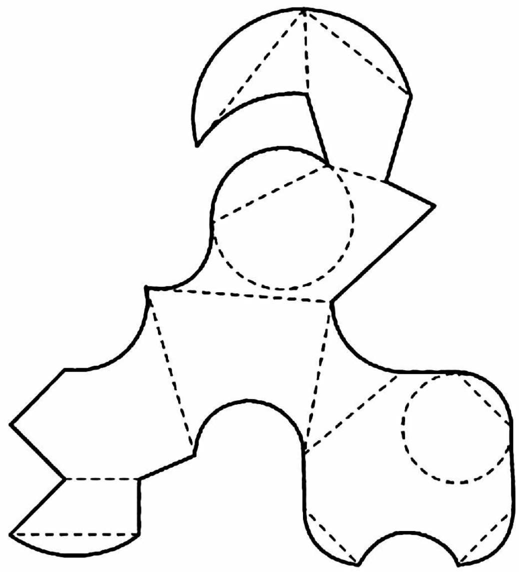


Рис. 3. Покрытие φ-объекта базовыми объектами вида C, D, K, L

2. Выделение объектов C или D на основе замены дуг $\widehat{a}$ хордами $\overline{s}$. Выделяем базовый объект C, такой, что $l_i = \widehat{a} \subset \mathrm{fr}\, C$, при условии, что $\mathrm{int}\, C \bigcap l_j = \varnothing$, $j \in I_n$. При этом $l_i = \widehat{a}$ заменяем хордой $l_i = \overline{s}$, т. е. меняем $g^{\widehat{a}} = (p_i, 1, \overline{p}_i, p_{i+1})$ на $g^{\overline{s}} = (p_i, 0, \overline{p}_i, p_{i+1})$. Если $\exists\, j$, $j \in I_n$, при котором $\mathrm{int}\, C_i \bigcap l_j \neq \varnothing$, то в качестве базового объекта выделяем сегмент D, аналогично п. 2 предыдущего алгоритма.

После выполнения первого и второго этапов получаем объект A'', граница которого состоит из элементов $l_i \in \{\overline{s}, \breve{a}\}$.

3. Последовательное (на основе принципа "разделяй и властвуй") разбиение объекта A'' на две части, каждая из которых затем вновь делится на две части и т. д. до формирования множества базовых объектов вида $\{K, L\}$. Если объект A'' не является базовым, то осуществляется деление объекта A'' на две части A''_1 и A''_2 прямолинейным отрезком. Заметим, что деление объекта A'' отрезком $[a, b]$ допустимо, если $[a, b] \subset A''$, $[a, b] \bigcap \mathrm{int}\, A'' \neq \varnothing$ и $a, b \in \mathrm{fr}\, A''$.

В качестве точки a будем выбирать, в порядке убывания приоритетности, одну из точек вида: 1) $a = p_{i+1} = \overline{s}_i \bigcap \overline{s}_{i+1}$ — "невыпуклую" вершину объекта A''; 2) $a = p_{i+1} = \breve{a}_i \bigcap \breve{a}_{i+1}$; 3) $a = p_{i+1} = \overline{s}_i \bigcap \breve{a}_{i+1}$; 4) $a \in \overline{s}_i$, $i \in I_n$, а в качестве точки b: 1) $b = p_{j+1} = \overline{s}_j \bigcap \overline{s}_{j+1}$ — "невыпуклую" вершину объекта A''; 2) $b = p_{j+1} = \breve{a}_j \bigcap \breve{a}_{j+1}$; 3) $b = p_{j+1} = \overline{s}_j \bigcap \breve{a}_{j+1}$; 4) $b \in \overline{s}_j$, 5) $b \in \breve{a}_j$, $j \in I_n, j \neq i$. Последовательно перебирая варианты выбора точек a и b, с учетом их приоритетности, находим допустимые варианты деления объекта A'' отрезком $[a, b]$. Далее на основе информации о $\mathrm{fr}\, A''$ формируем два новых объекта A''_1 и A''_2, каждый из которых в свою очередь аналогичным образом делим на две части A''_{11}, A''_{12} и A''_{21}, A''_{22} и т. д. Процесс деления объекта A'' заканчивается, когда все полученные объекты принадлежат множеству базовых объектов $\{K, L\}$.

Таким образом, имеем $A = (\bigcup C) \bigcup (\bigcup D) \bigcup (\bigcup V) \bigcup (\bigcup L) (\bigcup K)$.

На рис. 3 приведен пример покрытия φ-объекта базовыми объектами вида C, D, K, L.

1. *Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J.* Cutting and packing // Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization / Dell'Amico M., Maffioli F., Martello S. – Chichester: Wiley, 1997. – P. 393–412.
2. *Stoyan Yu. G.* Φ-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
3. *Stoyan Y., Gil M., Terno et al.* Construction of a Φ-function for two convex polytopes // Appl. Math. – 2002. – **2**, No 29. – P. 199–218.
4. *Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T.* Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // Annals of Oper. Res. – 2008. – **35**. – P. 267–281.
5. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.* Φ-functions for complex 2D-objects, 4OR // Quarterly J. Belgian, French and Italian Operations Research Soc. – 2004. – No 2. – P. 69–84.
6. *Stoyan Yu., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.* Φ-functions for primary 2D-objects // Studia Informatica Universalis. – 2001. – No 2. – P. 1–32.
7. *Стоян Ю. Г., Гиль Н. И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев: Наук. думка, 1976. – 246 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 21.12.2009

N. I. Gil', T. E. Romanova, M. V. Zlotnik

Decomposition of 2D-geometric objects

We consider the decomposition algorithm for arbitrarily shaped 2D φ-objects, whose boundaries are formed by a union of segments of straight lines and circular arcs. The algorithm is a powerful tool for deriving the Φ-functions of composed φ-objects in mathematical modeling of geometric design problems. The algorithm uses a class of basic φ-objects, whose Φ-functions are known, as a basis. A number of computational results is given.