УДК 539.3

© 2010

Б. М. Калиняк

Інтегральні рівняння зі змінною верхньою межею динамічної задачі теорії пружності в напруженнях у неоднорідному довгому порожнистому ортотропному циліндрі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Г. С. Кітом)

Запропоновані інтегральні рівняння та інтегральні умови для розв'язування динамічної задачі теорії пружності і незв'язаної термопружності у неоднорідному довгому ортотропоному порожнистому циліндрі, отримані безпосереднім інтегруванням відповідних рівнянь руху та суцільності у напруженнях. Такий підхід дозволяє одержувати наближені аналітичні розв'язки задач пружності і термопружності без застосування інтегральних перетворень або розкладу в ряди за власними функціями.

Пружні колові порожнисті циліндри, виготовлені з неоднорідних матеріалів, є поширеними елементами інженерних конструкцій. Динамічні задачі в таких тілах, навіть без врахування їх неоднорідності, є актуальними і тепер, незважаючи на досить довгу історію їх дослідження [1–3]. Врахування неоднорідності і термочутливості приводить до нелінійних рівнянь або рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Потреба аналітичного подання розв'язків відповідних динамічних задач теорії пружності викликана, зокрема, задачами відтворення термонапруженого стану тіл за неповної інформації про силові та теплові навантаження на поверхнях тіла або задачами оптимального за швидкодією керування нагріванням тіл при обмеженнях на температуру чи напруження [4–5]. Метою даної роботи є отримання сукупності інтегральних рівнянь для динамічної задачі пружності (незв'язаної задачі термопружності) зі змінною верхньою межею в ортотропному неоднорідному довгому порожнистому циліндрі, що дозволяє подати розв'язок аналітично без застосування апарату власних функцій, потенціальних функцій, інтегральних перетворень.

Розглядається неоднорідний ортотропний довгий порожнистий циліндр з внутрішнім R_1 і зовнішнім радіусом R_2 з залежними від радіальної змінної r механічними характеристиками матеріалу — модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона. Циліндр знаходиться під дією рівномірно розподілених динамічних навантажень на внутрішній і зовнішніх поверхнях $p_1(t)$, $p_2(t)$, де t — час.

Основні рівняння.

1. Рівняння руху:

$$\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r(r,t)}{\partial r}+\frac{\widetilde{\sigma}_r(r,t)-\widetilde{\sigma}_\varphi(r,t)}{r}=-\widetilde{F}_r(r,t)+\widetilde{\gamma}(r)\frac{\partial^2\widetilde{u}_r(r,t)}{\partial t^2},$$

яке після введення сумарних напружень $\widetilde{\sigma}=\widetilde{\sigma}_r^{+}\widetilde{\sigma}_\varphi$ і густини сили пружності $\widetilde{F}_{re}(r,t)= =\widetilde{\gamma}(r)\dfrac{\partial^2\widetilde{u}_r(r,t)}{\partial t^2}$, де $\widetilde{\gamma}_r$ — густина матеріалу; $\widetilde{u}_r$ — радіальна компонента вектора перемищень; $\widetilde{F}_r(r,t)$ — радіальна компонента вектора масових сил, $\widetilde{\sigma}_r$, $\widetilde{\sigma}_\varphi$ — радіальна, колова компоненти тензора напружень, можна подати у безрозмірних змінних $\rho = r/R_2$ як

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma_r(\rho,t)) = \rho\sigma(\rho,t) + \rho^2 U(\rho,t). \tag{1}$$

Тут $U(\rho,t) = F_{re}(\rho,t) - F_r(\rho,t)$, $F_r(\rho,t) = R_2\widetilde{F}_r(r,t) = R_2\widetilde{F}_r(\rho R_2,t)$, $\widetilde{u}_r(r,t) = \widetilde{u}_r(\rho R_2,t) = u_r(\rho,t)$, $F_{re}(\rho,t) = \gamma(\rho)R_2\widetilde{F}_{re}(r,t) = R_2\gamma(\rho)\dfrac{\partial^2 u_r(\rho,t)}{\partial t^2}$.

2. Зв'язок між компонентами тензора деформації і тензора напружень:

$$e_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\sigma_j, \qquad i,j = 1,2,3 \qquad \text{або} \qquad i,j = r,\varphi,z, \tag{2}$$

де

$$a_{11}(\rho) = \frac{1}{E_r(\rho)}; \qquad a_{22}(\rho) = \frac{1}{E_\varphi(\rho)}; \qquad a_{33}(\rho) = \frac{1}{E_z(\rho)};$$

$$a_{12}(\rho) = -\frac{\nu_{r\varphi}(\rho)}{E_\varphi(\rho)}; \qquad a_{13}(\rho) = -\frac{\nu_{rz}(\rho)}{E_z(\rho)}; \qquad a_{23}(\rho) = -\frac{\nu_{\varphi z}(\rho)}{E_z(\rho)};$$

E_r, E_φ, E_z — модулі пружності вздовж радіального, колового та осьового напрямів відповідно; ν_{ij} — коефіцієнт Пуассона, що характеризує стискання вздовж i-ї координати при розтягуванні вздовж j-ї координати ($i,j = r,\varphi,z$). Зрозуміло, що формули (2), виражені через сумарні $\sigma(\rho,t)$, радіальні $\sigma_r(\rho,t)$ напруження та поздовжню деформацію e_z, матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
e_r(\rho,t) &= b_{11}(\rho)\sigma_r(\rho,t) + b_{12}(\rho)\sigma(\rho,t) + b_{13}(\rho)e_z(t),\\
e_\varphi(\rho,t) &= b_{21}(\rho)\sigma_r(\rho,t) + b_{22}(\rho)\sigma(\rho,t) + b_{23}(\rho)e_z(t),\\
e_z(\rho,t) &= b_{31}(\rho)\sigma_r(\rho,t) + b_{32}(\rho)\sigma(\rho,t) + b_{33}(\rho)\sigma_z(t),
\end{aligned} \tag{3}$$

де для ортотропного матеріалу

$$\begin{aligned}
&b_{11}(\rho) = a_{11}(\rho) - a_{12}(\rho) - a_{13}(\rho)\frac{a_{13}(\rho) - a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)},\\
&b_{12}(\rho) = a_{12}(\rho) - \frac{a_{13}(\rho)a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)}, \qquad b_{13} = \frac{a_{13}(\rho)}{a_{33}(\rho)},\\
&b_{21}(\rho) = a_{12}(\rho) - a_{22}(\rho) - a_{23}(\rho)\frac{a_{13}(\rho) - a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)}, \qquad b_{23}(\rho) = \frac{a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)},\\
&b_{22}(\rho) = a_{22}(\rho) - \frac{a_{23}^2(\rho)}{a_{33}(\rho)}, \qquad b_{31}(\rho) = a_{13}(\rho) - a_{23}(\rho),\\
&b_{32}(\rho) = a_{23}(\rho), \qquad b_{33}(\rho) = a_{33}(\rho),
\end{aligned} \tag{4}$$

а для ізотропного —

$$
\begin{aligned}
&b_{11}(\rho)=\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{12}(\rho)=-\frac{\nu(\rho)[1+\nu(\rho)]}{E(\rho)}, \qquad b_{13}(\rho)=-\nu(\rho),\\
&b_{21}(\rho)=-\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{22}(\rho)=\frac{1-\nu^2(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{23}(\rho)=-\nu(\rho),\\
&b_{31}(\rho)=0, \qquad b_{32}(\rho)=-\frac{\nu(\rho)}{E(\rho)}, \qquad b_{33}(\rho)=\frac{1}{E(\rho)}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

3. Рівняння суцільності

$$
\rho\frac{\partial e_\varphi}{\partial\rho}=e_r-e_\varphi,
$$

яке у напруженнях з використанням рівняння руху (1) можна записати як

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\rho}[b_{22}(\rho)\sigma]&=\frac{1}{\rho}\left[b_{11}(\rho)+b_{21}(\rho)-\rho\frac{\partial b_{21}(\rho)}{\partial\rho}\right]\sigma_r(\rho)+\\
&+\frac{1}{\rho}\left[b_{13}(\rho)-b_{23}(\rho)-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}b_{23}(\rho)\right]e_z-b_{21}(\rho)U(\rho,t).
\end{aligned} \tag{6}
$$

4. Граничні та початкові умови:

$$
\sigma_r(\rho_1,t)=-p_1(t), \qquad \sigma_r(1,t)=-p_2(t), \qquad \int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\sigma_z(\eta,t)\,d\eta=P(t), \tag{7}
$$

$$
u_r(\rho,0)=s(\rho), \qquad \left[\frac{\partial u_r(\rho,t)}{\partial t}\right]\bigg|_{t=0}=s_1(\rho). \tag{8}
$$

Остання умова (7) описує два випадки напружено-деформованого стану: а) задані зусилля на кінцях циліндра, визначається осьова деформація, б) кінці циліндра фіксовані від осьових переміщень ($e_z=0$), визначається зусилля на кінцях циліндра.

Зведення до інтегральних рівнянь. Безпосереднє двократне інтегрування за часом виразу $U(\rho,t)=F_{re}(\rho,t)-F_r(\rho,t)=R_2\gamma(\rho)\dfrac{\partial^2u_r(\rho,t)}{\partial t^2}-F_r(\rho,t)$ з застосуванням методу інтегрування по частинах та використанням початкових умов (8) дозволяє виразити переміщення через сили у вигляді

$$
u_r(\rho,t)=\int\limits_0^t(t-\tau)\frac{U(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2}d\tau+s_1(\rho)t+s(\rho)+\int\limits_0^t(t-\tau)\frac{F_r(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2}d\tau. \tag{9}
$$

Якщо рівняння руху (1) проінтегрувати з врахуванням граничних умов для радіальних напружень (6), то отримаємо інтегральне рівняння

$$
\sigma_r(\rho,t)=-\frac{\rho_1^2}{\rho^2}p_1(t)+\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[\eta\sigma(\eta,t)+\eta^2U(\eta,t)]\,d\eta \tag{10}
$$

та граничну інтегральну умову

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}[\eta\sigma(\eta,t)+\eta^2U(\eta,t)]d\eta=\rho_1^2p_1(t)-p_2(t). \tag{11}$$

Інтегрування рівняння суцільності (2) за радіальною координатою з використанням (7) та (9) дозволяє отримати таке інтегральне рівняння відносно сумарних напружень $\sigma(\rho,t)$ та сил $U(\rho,t)$:

$$\sigma(\rho,t)-\frac{1}{b_{22}(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)]\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{b_{22}(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)-\frac{b_{21}(\eta)}{\eta^2}\right]\eta^2U(\eta,t)\,d\eta=$$

$$=\Psi_1(\rho,t)+\frac{1}{b_{22}(\rho)}\left[A(t)+e_z(t)\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta}\left[b_{13}(\eta)-b_{23}(\eta)-\eta\frac{\partial}{\partial\rho}b_{23}(\eta)\right]d\eta\right], \tag{12}$$

де

$$\varphi(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta^3}\left[b_{11}(\eta)+b_{21}(\eta)-\eta\frac{\partial b_{21}(\eta)}{\partial\eta}\right]d\eta,\qquad \Psi_1(\rho,t)=\frac{\rho_1^2\varphi(\rho)}{b_{22}(\rho)}p_1(t).$$

Інтегрування другого матеріального співвідношення (3) з використанням (9) та $e_\varphi=$ $=u_r/(\rho R_2)$ приводить до

$$\sigma(\rho,t)+\frac{b_{21}(\rho)}{b_{22}(\rho)}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta+\frac{b_{21}(\rho)}{b_{22}(\rho)}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2U(\eta,t)\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{\rho R_2b_{22}(\rho)}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)\frac{U(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2}d\tau=\Psi_2(\rho,t)-\frac{b_{23}(\rho)}{b_{22}(\rho)}e_z(t), \tag{13}$$

де

$$\Psi_2(\rho,t)=\frac{b_{21}(\rho)}{b_{22}(\rho)}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}p_1(t)+\frac{s_1(\rho)}{\rho R_2b_{22}(\rho)}t+\frac{s(\rho)}{\rho R_2b_{22}(\rho)}+\frac{1}{\rho R_2b_{22}(\rho)}\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)\frac{F_r(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2}d\tau.$$

Однак ця система інтегральних рівнянь не є достатньою для однозначного розв'язування динамічної задачі пружності, оскільки самих початкових значень переміщень $s(\rho)$ і їх похідних $s_1(\rho)$ у початковий момент часу недостатньо для визначення початкових значень густини сил $U(\rho,0)$. Додатковою умовою, яка зв'язує ці величини у початковий момент часу, є вираз

$$e_r=b_{11}(\rho)\sigma_r+b_{12}(\rho)\sigma+b_{13}(\rho)e_z.$$

Якщо проінтегрувати формулу $e_r = \dfrac{1}{R_2}\dfrac{\partial u_r}{\partial \rho}$ за ρ, одержимо інтегральну умову

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[w_1(\rho) - w_1(\eta) + \frac{b_{12}(\eta)}{\eta}\right]\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta + \int\limits_{\rho_1}^{\rho}[w_1(\rho) - w_1(\eta)]\eta^2 U(\eta,t)\,d\eta -$$

$$- \int\limits_{0}^{t}(t-\tau)\frac{U(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2^2}d\tau = \Psi_3(\rho,t) - e_z(t)\int\limits_{\rho_1}^{\rho} b_{13}(\eta)\,d\eta, \tag{14}$$

де

$$\Psi_3(\rho,t) = \frac{s_1(\rho)t}{R_2} + \frac{s(\rho)}{R_2} + \int\limits_{0}^{t}(t-\tau)\frac{F_r(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2^2}d\tau + w_1(\rho)\rho_1^2 p_1(t), \qquad w_1(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{b_{11}(\eta)}{\eta^2}d\eta.$$

Інтегральну умову (7) на поздовжні напруження, виражену через радіальні та сумарні напруження і осьову деформацію, можна подати як

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\left\{\frac{1}{b_{33}(\eta)}e_z - \left[w(1) - w(\eta) + \frac{b_{32}(\eta)}{b_{33}(\eta)}\right]\sigma(\eta,t) - [w(1) - w(\eta)]\eta U(\eta,t)\right\}d\eta =$$

$$= P(t) - \rho_1^2 p_1(t) w(1), \tag{15}$$

де

$$w(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta}\frac{b_{31}(\eta)}{b_{33}(\eta)}d\eta.$$

Отже, динамічна задача пружності (1), (3), (6)–(8) звелася до розв'язування інтегральних рівнянь (12), (13) відносно сумарних напружень $\sigma(\rho,t)$ та сил пружності $U(\rho,t)$, де величини $A(t)$ та $e_z(t)$ визначаються з інтегральних умов (11), (15), а початкове значення $U(\rho,0)$ — з інтегральної умови (14). Тоді радіальні напруження визначаються з рівняння (10), колові та осьові напруження — з матеріальних співвідношень (3), переміщення — з формули (9). Якщо замість початкових переміщень відомі початкові значення інерційних сил $F_{re}(\rho,0)$, то умова (13) задовольняється автоматично внаслідок рівняння суцільності та співвідношень Коші.

Запишемо отримані інтегральні рівняння для окремих випадків.

А. Однорідний ортотропний циліндр (відсутня залежність характеристик матеріалу від радіальної координати). Тоді відповідні інтегральні рівняння будуть:

$$\sigma(\rho,t) - \frac{1}{b_{22}}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[\varphi(\rho) - \varphi(\eta)]\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta - \frac{1}{b_{22}}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[\varphi(\rho) - \varphi(\eta) - \frac{b_{21}}{\eta^2}\right]\eta^2 U(\eta,t)\,d\eta =$$

$$= \Psi_1(\rho,t) + \frac{1}{b_{22}}\left[A(t) + e_z(t)(b_{13} - b_{23})\ln\frac{\rho}{\rho_1}\right],$$

$$\sigma(\rho,t)+\frac{b_{21}}{b_{22}}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta+\frac{b_{21}}{b_{22}}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2U(\eta,t)\,d\eta-\frac{1}{\rho\gamma R_2^2b_{22}}\int\limits_0^t(t-\tau)U(\rho,\tau)\,d\tau=$$

$$=\Psi_2(\rho,t)-\frac{b_{23}}{b_{22}}e_z(t).$$

Інтегральні умови записуються як

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}[\eta\sigma(\eta,t)+\eta^2U(\rho,t)]\,d\eta=\rho_1^2p_1(t)-p_2(t),$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\left\{\frac{1}{b_{33}}e_z-\left[w(1)-w(\eta)+\frac{b_{32}}{b_{33}}\right]\sigma(\eta,t)-[w(1)-w(\eta)]\eta U(\eta,t)\right\}d\eta=$$

$$=P(t)+\rho_1^2p_1(t)\frac{b_{31}}{b_{33}}\ln(\rho_1),$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[w_1(\rho)-w_1(\eta)+\frac{b_{12}}{\eta}\right]\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta+\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[w_1(\rho)-w_1(\eta)]\eta^2U(\eta,t)\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{\gamma R_2^2}\int\limits_0^t(t-\tau)U(\rho,\tau)\,d\tau=\Psi_3(\rho,t)-b_{13}e_z(t)(\rho-\rho_1),$$

де

$$\varphi(\rho)=-\frac{\rho^{-2}-\rho_1^{-2}}{2}\left[a_{11}-a_{22}+\frac{a_{23}^2-a_{13}^2}{a_{33}}\right],\qquad w(\rho)=-\frac{b_{31}}{b_{33}}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right),$$

$$w_1(\rho)=b_{11}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta^2}d\eta=-b_{11}(\rho^{-1}-\rho_1^{-1}),\qquad\Psi_1(\rho,t)=\frac{\rho_1^2\varphi(\rho)}{b_{22}}p_1(t),$$

$$\Psi_2(\rho,t)=\frac{b_{21}}{b_{22}}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}p_1(t)+\frac{s_1(\rho)}{\rho R_2b_{22}}t+\frac{s(\rho)}{\rho R_2b_{22}}+\frac{1}{\rho\gamma R_2^2b_{22}}\int\limits_0^t(t-\tau)F_r(\rho,\tau)\,d\tau,$$

$$\Psi_3(\rho,t)=\frac{s_1(\rho)t}{R_2}+\frac{s(\rho)}{R_2}+\frac{1}{\gamma R_2^2}\int\limits_0^t(t-\tau)F_r(\rho,\tau)\,d\tau+w_1(\rho)\rho_1^2p_1(t).$$

Б. Однорідний ізотропний циліндр (характеристики матеріалу сталі, а відповідні сталі b_{ij} задані формулами (5)). Інтегральні рівняння мають вигляд

$$\sigma(\rho,t)-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2U(\eta,t)\,d\eta-$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{\rho\gamma R_2^2}\int\limits_0^t (t-\tau)U(\rho,\tau)\,d\tau = \Psi_2(\rho,t)+\frac{\nu E}{1-\nu^2}e_z(t),$$

$$\sigma(\rho,t)+\frac{1}{1-\nu}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} U(\eta,t)d\eta = A(t)\frac{E}{1-\nu^2},$$

а інтегральні умови можна подати як

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}[\eta\sigma(\eta,t)+\eta^2U(\rho,t)]\,d\eta = \rho_1^2p_1(t)-p_2(t), \qquad \int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\{Ee_z+\nu\sigma(\eta,t)\}\,d\eta = P(t),$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\sigma(\eta,t)\,d\eta-\frac{1}{(1-\nu)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta U(\eta,t)\,d\eta-\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{1}{\gamma R_2^2}\int\limits_0^t (t-\tau)U(\rho,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2}\Psi_3(\rho,t)+\frac{1}{(1-\nu)\rho}(\rho_1^2p_1(t)-p_2(t))+\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}e_z(t)(\rho-\rho_1),$$

де

$$\Psi_2(\rho,t) = -\frac{1}{1-\nu}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}p_1(t)+\frac{Es_1(\rho)}{\rho R_2(1-\nu^2)}t+\frac{Es(\rho)}{\rho R_2(1-\nu^2)}+$$

$$+\frac{E}{\rho\gamma R_2^2(1-\nu^2)}\int\limits_0^t (t-\tau)F_r(\rho,\tau)\,d\tau,$$

$$\Psi_3(\rho,t) = \frac{s_1(\rho)t}{R_2}+\frac{s(\rho)}{R_2}+\frac{1}{\gamma R_2^2}\int\limits_0^t (t-\tau)F_r(\rho,\tau)\,d\tau-\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\rho_1^2p_1(t).$$

B. Неоднорідний ізотропний циліндр ($b_{ij}(\rho)$ задані формулами (5)). Інтегральні рівняння можна записати як

$$\sigma(\rho,t)-\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)]\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta-$$

$$-\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)+\frac{1+\nu(\eta)}{\eta^2E(\eta)}\right]\eta^2U(\eta,t)\,d\eta =$$

$$= \Psi_1(\rho,t)+\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}[A(t)-e_z(t)(\nu(\rho)-\nu(\rho_1))],$$

$$\sigma(\rho,t)-\frac{1}{1-\nu(\rho)}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta-\frac{1}{1-\nu(\rho)}\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2U(\eta,t)\,d\eta-$$

$$-\frac{E(\rho)}{(1-\nu^2(\rho))\rho R_2^2\gamma(\rho)}\int\limits_0^t (t-\tau)U(\rho,\tau)\,d\tau = \Psi_2(\rho,t) + \frac{\nu(\rho)E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}e_z(t),$$

а інтегральні умови як

$$\int\limits_{\rho_1}^1 [\eta\sigma(\eta,t) + \eta^2 U(\rho,t)]\,d\eta = \rho_1^2 p_1(t) - p_2(t), \qquad \int\limits_{\rho_1}^1 \eta\{E(\eta)e_z + \nu(\eta)\sigma(\eta,t)\}\,d\eta = P(t),$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[w_1(\rho) - w_1(\eta) - \frac{\nu(\eta)(1+\nu(\eta))}{\eta E(\eta)}\right]\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta + \int\limits_{\rho_1}^{\rho}[w_1(\rho)-w_1(\eta)]\eta^2 U(\eta,t)\,d\eta -$$

$$-\int\limits_0^t (t-\tau)\frac{U(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2^2}d\tau = \Psi_3(\rho,t) + e_z(t)\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\nu(\eta)\,d\eta,$$

де

$$\varphi(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)}\right]d\eta, \qquad \Psi_1(\rho,t) = \frac{\rho_1^2\varphi(\rho)}{b_{22}(\rho)}p_1(t), \qquad w_1(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1+\nu(\eta)}{\eta^2 E(\eta)}d\eta,$$

$$\Psi_2(\rho,t) = -\frac{1}{1-\nu(\rho)}\frac{\rho_1^2}{\rho^2}p_1(t) + \frac{E(\rho)s_1(\rho)}{\rho R_2[1-\nu^2(\rho)]}t + \frac{E(\rho)s(\rho)}{\rho R_2[1-\nu^2(\rho)]} +$$

$$+\frac{E(\rho)}{\rho R_2[1-\nu^2(\rho)]}\int\limits_0^t (t-\tau)\frac{F_r(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2}d\tau,$$

$$\Psi_3(\rho,t) = \frac{s_1(\rho)t}{R_2} + \frac{s(\rho)}{R_2} + \int\limits_0^t (t-\tau)\frac{F_r(\rho,\tau)}{\gamma(\rho)R_2^2}d\tau + w_1(\rho)\rho_1^2 p_1(t).$$

Г. Неоднорідний ізотропний циліндр (квазістатична задача, $U(\rho,t) = -F_r(\rho,t)$, b_{ij} визначаються формулами (5)). Інтегральне рівняння тоді набуває вигляду

$$\sigma(\rho) - \frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)]\eta\sigma(\eta)\,d\eta = \Psi_1(\rho) + \frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}[\overline{A} - e_z\nu\rho)],$$

а інтегральна умова —

$$\int\limits_{\rho_1}^1 \eta\sigma(\eta,t)\,d\eta = \rho_1^2 p_1 - p_2, \qquad \int\limits_{\rho_1}^1 \eta\{E(\eta)e_z + \nu(\eta)\sigma(\eta)\}\,d\eta = P,$$

де

$$\overline{A} = A + e_z\nu(\rho_1), \qquad \varphi(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1+\nu(\eta)}{E(\eta)}\right]d\eta,$$

$$\Psi_1(\rho,t)=\frac{E(\rho)\rho_1^2\varphi(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}p_1(t)-\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)+\frac{1+\nu(\eta)}{\eta^2E(\eta)}\right]\eta^2F_r(\eta,t)\,d\eta.$$

Д. Неоднорідний ортотропний циліндр (квазістатична задача, $U(\rho,t)=-F_r(\rho,t)$, b_{ij} визначається формулами (4)). Відповідний аналог інтегрального рівняння (12) має вигляд:

$$\sigma(\rho)-\frac{1}{b_{22}(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)]\eta\sigma(\eta)\,d\eta=$$

$$=\Psi_1(\rho)+\frac{1}{b_{22}(\rho)}\left[A+e_z\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta}\left[b_{13}(\eta)-b_{23}(\eta)-\eta\frac{\partial}{\partial\eta}b_{23}(\eta)\right]d\eta\right], \tag{16}$$

а інтегральні умови запишуться як

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\sigma(\eta,t)\,d\eta=\rho_1^2p_1-p_2,$$

$$\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\left\{\frac{1}{b_{33}(\eta)}e_z-\left[w(1)-w(\eta)+\frac{b_{32}(\eta)}{b_{33}(\eta)}\right]\sigma(\eta,t)\right\}d\eta=P-\rho_1^2p_1\int\limits_{\rho_1}^{1}\frac{1}{\eta}\frac{b_{31}(\eta)}{b_{33}(\eta)}d\eta,$$

де

$$\varphi(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta^3}\left[b_{11}(\eta)+b_{21}(\eta)-\eta\frac{\partial b_{21}(\eta)}{\partial\eta}\right]d\eta,\qquad\varphi(\rho_1)=0,\qquad w(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{1}{\eta}\frac{b_{31}(\eta)}{b_{33}(\eta)}d\eta,$$

$$\Psi_1(\rho)=\frac{\rho_1^2\varphi(\rho)}{b_{22}(\rho)}p_1-\frac{1}{b_{22}(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[\varphi(\rho)-\varphi(\eta)-\frac{b_{21}(\eta)}{\eta^2}\right]\eta^2F_r(\eta)\,d\eta.$$

Таким чином, запропоновані рівняння є інтегральними рівняннями зі змінною верхньою межею та сепарабельними ядрами і описують динамічну незв'язану задачу пружності у напруженнях. З інтегральних рівнянь видно, що врахування ортотропії не змінює вигляду ядра. Відповідні рівняння незв'язаної задачі динамічної термопружності легко отримати врахуванням доданків $\alpha_i(\rho)T(\rho,t)$ $(i=r,\varphi,z)$ у кожній з рівностей (2), що, в свою чергу, спричинить появу у функціях $\Psi_3(\rho,t)$, $\Psi_2(\rho,t)$, $\Psi_1(\rho,t)$ доданків

$$-\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\beta_r(\eta)T(\eta,t)\,d\eta,\qquad-\beta_\varphi(\rho)T(\rho,t),$$

$$\frac{1}{b_{22}(\rho)}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\left[\frac{\beta_r(\eta)-\beta_\varphi(\eta)}{\eta}T(\eta,t)-\frac{\partial(\beta_\varphi(\eta)T(\eta,t))}{\partial\eta}\right]d\eta,$$

$$\left(\beta_r(\rho)=\alpha_r(\rho)-\frac{a_{13}(\rho)}{a_{33}(\rho)}\alpha_z(\rho),\ \beta_\varphi(\rho)=\alpha_\varphi(\rho)-\frac{a_{23}(\rho)}{a_{33}(\rho)}\alpha_z(\rho)\right),$$

відповідно.

В окремих випадках квазістатичних задач термопружності з запропонованих у цій роботі інтегральних рівнянь отримуються інтегральні рівняння, одержані в роботах для ізотропних [8] та ортотропних [7] циліндрів. Останні розв'язані методом послідовних наближень [7] або за допомогою квадратурних формул [8]. Інтегральне рівняння для сумарних напружень квазістатичної задачі пружності для ортотропного циліндра (16) можна одержати з відповідних інтегральних рівнянь роботи [7] шляхом виключення з них радіальної компоненти тензора напружень σ_r. Метод розв'язання відповідної квазістатичної задачі теорії пружності [8] застосовний і до розв'язування динамічної задачі, оскільки, як це видно з рівнянь (1)–(12), відповідна динамічна задача у кожний конкретний момент часу зводиться до розв'язування квазістатичної задачі пружності [1]. Інтегральні умови можуть служити засобом швидкої перевірки правильності розв'язків, отриманих іншими методами.

1. *Онишко Л. И., Сенюк М. М.* Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – № 1. – С. 55–61.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
3. *Мусій Р. С.* Ключове рівняння і розв'язок у напруженнях одновимірної задачі термопружності для циліндрів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 1. – С. 118–121.
4. *Ясінський А.* Обернена задача визначення теплового навантаження та термонапруженого стану циліндричних тіл за поверхневими переміщеннями // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 18–22.
5. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещенииями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
7. *Шевчук В. А.* Одновимірні задачі пружності та термопружності для неоднорідних ортотропних порожнистих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 104–112.
8. *Калиняк Б. М.* Аналітичні вирази для напружень і термонапружень в довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Там само. – № 2. – С. 79–87.

*Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів*

Надійшло до редакції 25.11.2009

B. M. Kalynyak

Integral equations with variable upper limit for the dynamical problem of elasticity theory in terms of stresses in an inhomogeneous long hollow orthotropic cylinder

The integral equations with variable upper limits and a separable kernel, as well as integral conditions for solving the dynamical problem of elasticity and uncoupled thermoelasticity in an inhomogeneous long hollow orthotropic cylinder, have been proposed. The equations have been obtained by the procedure of a direct integration of the corresponding differential equations of motion and the compatibility equations in terms of stresses. This approach makes it possible to determine an approximate analytical solution of problems of elasticity and thermo-elasticity without determining the potential functions and without the methods of integral transformations and the expansion in series in eigenfunctions.