УДК 539.3

В. П. Ревенко

Подання загального розв'язку рівнянь теорії пружності у сферичній та еліптичній системах координат

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Знайдено розв'язок рівнянь Ламе і побудовано загальне подання тензора деформацій і напружень через три незалежні гармонічні функції у сферичній та еліптичній системах координат. Виписані прості умови для знаходження власних функцій у еліптичній системі координат.

Знаходження напружено-деформованого стану (НДС) пружного тіла у криволінійних системах координат є важливою науковою і практичною проблемою [1–3]. Відзначено [1], що перспективним методом розрахунку НДС є метод розкладу за власними функціями. Інші підходи до визначення компонентів тензора напружень наведено в [2–6].

1. Подання загального розв'язку у криволінійній системі координат. У роботі [6] знайдено загальне подання компонентів вектора пружних переміщень $\mathbf{u}_\zeta$ для криволінійної ортогональної системи координат $\zeta_j(x, y, z)$

$$u_{\zeta_k} = \frac{1}{h_k}\frac{\partial(z\Phi)}{\partial\zeta_k} - \nu_1\frac{\partial\zeta_k}{\partial z}h_k\Phi + \frac{1}{h_k}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta_k} + Q_k \qquad (k = \overline{1,3}), \tag{1}$$

де $\nu_1 = 4(1-\nu)$; Φ, Ψ, Q — довільні гармонічні функції, які названо функціями переміщень. Запишемо компоненти тензора деформацій

$$\varepsilon_k = \frac{1}{h_k}\frac{\partial u_{\zeta k}}{\partial\zeta_k} + \sum_{j\neq k}\frac{1}{h_k h_j}\frac{\partial h_k}{\partial\zeta_j}u_{\zeta j}, \qquad \gamma_{km} = \frac{h_k}{h_m}\frac{\partial}{\partial\zeta_m}\frac{u_{\zeta k}}{h_k} + \frac{h_m}{h_k}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\frac{u_{\zeta m}}{h_m}. \tag{2}$$

Використавши узагальнений закон Гука [2, 3] і формули (2), знайдемо напруження

$$\sigma_k = 2G\left[\varepsilon_k - 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right], \qquad \tau_{km} = G\gamma_{km} \qquad (k \neq m). \tag{3}$$

Конкретизуємо вигляд компонентів тензора напружень (3) для найбільш поширених криволінійних координат. Циліндрична система координат розглянута в [6].

2. Еліптична система координат. Еліптичні координати $\zeta_1 = \xi$, $\zeta_2 = \eta$, $\zeta_3 = z$ пов'язані з декартовими координатами такими рівняннями [7]:

$$x = c\cosh\xi\cos\eta, \qquad y = c\sinh\xi\sin\eta, \qquad z = z,$$

де c — масштабний множник, а метричні коефіцієнти Ламе дорівнюють $h_1 = h_2 = \mathbf{c}\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta}$, $h_3 = 1$. Підставимо ці коефіцієнти у співвідношення (1) і знайдемо компоненти вектора пружних переміщень у еліптичній системі координат

$$u_\xi = \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right], \qquad u_\eta = \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial P}{\partial\eta} - \frac{\partial Q}{\partial\xi}\right], \qquad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - \nu_1\Phi, \tag{4}$$

де $P = z\Phi + \Psi$. Врахуємо подання переміщень (4) і конкретизуємо вираз деформацій (2)

$$\varepsilon_\xi = \frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}\right] + \frac{c^2}{h_1^4}\left\{\sin\eta\cos\eta\left[\frac{\partial P}{\partial\eta} - \frac{\partial Q}{\partial\xi}\right] - \sinh\xi\cosh\xi\left[\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right]\right\},$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}\right] + \frac{c^2}{h_1^4}\left\{\sin\eta\cos\eta\left[\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta}\right] + \sinh\xi\cosh\xi\left[\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{z}} = \frac{\partial^2 P}{\partial \mathrm{z}^2} - \nu_1\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}}, \qquad e = -2(1-2\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\gamma_{\xi\mathrm{z}} = \frac{1}{h_1}\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial\xi\partial\mathrm{z}} - \nu_1\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial\eta}\right], \qquad \gamma_{\eta z} = \frac{1}{h_1}\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial\eta\partial z} - \nu_1\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial\xi}\right],$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{h_1^2}\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}\right] - \frac{2c^2}{h_1^4}\left\{\sin\eta\cos\eta\left[\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right] + \sinh\xi\cosh\xi\left[\frac{\partial P}{\partial\eta} - \frac{\partial Q}{\partial\xi}\right]\right\}.$$

Підставимо у співвідношення (3) деформації (5) і знайдемо нормальні напруження в еліптичній системі координат

$$\sigma_\xi = 2G\left\{\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}\right] + \frac{c^2}{h_1^4}\left\{\sin\eta\cos\eta\left[\frac{\partial P}{\partial\eta} - \frac{\partial Q}{\partial\xi}\right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sinh\xi\cosh\xi\left[\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right]\right\} - 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\},$$

$$\sigma_{\mathrm{z}} = 2G\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial\mathrm{z}^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\} = 2G\left\{z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}, \tag{6}$$

$$\sigma_\eta = 2G\left\{\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\partial\eta}\right] + \frac{c^2}{h_1^4}\left\{\sin\eta\cos\eta\left[\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta}\right] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sinh\xi\cosh\xi\left[\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right]\right\} - 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}.$$

Дотичні напруження будуть рівні відповідним деформаціям (5), помноженим на модуль G.

Відзначимо, що в знайдені напруження σ_{z}, $\tau_{\xi\mathrm{z}}$, $\tau_{\eta\mathrm{z}}$ явно не входять змінні η, ξ.

Знаходження власних функцій. Використаємо підхід роботі [6], де побудовано власні векторні функції у циліндричній системі координат. Розглянемо НДС еліптичного циліндра, який займає об'єм $D = \{(\xi,\eta,z) \in ([0,R],[0,2\pi],[-h,h])\}$ під час навантаження бічної поверхні. На торцях циліндра $z = \pm h$ відсутні навантаження

$$\sigma_z(\xi,\eta,z) = 0, \qquad \tau_{z\eta}(\xi,\eta,z) = 0, \qquad \tau_{z\xi}(\xi,\eta,z) = 0, \qquad z = \pm h. \tag{7}$$

Власні функції, які задовольняють умови (7), будуємо аналогічно роботі [6]. Врахуємо вираз напружень (5), (6) і зведемо граничні умови (7) до таких:

$$z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \qquad z\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} - (1-2\nu)\Phi = 0, \qquad z = \pm h \text{ —} \tag{8}$$

для визначення функцій переміщень Φ, Ψ і

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad z = \pm h \text{ —} \tag{9}$$

для визначення функції Q. Побудуємо методом відокремлення змінних розв'язок рівняння Лапласа в еліптичній системі координат. Підставивши цей розв'язок в умови (8), (9), знайдемо явний вигляд власних функцій.

3. Сферична система координат. Сферичні координати $\zeta_1 = r$, $\zeta_2 = \theta$, $\zeta_3 = \varphi$ пов'язані з декартовими координатами залежностями [7]:

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad x_3 = r\cos\theta,$$

а метричні коефіцієнти Ламе дорівнюють $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$. Врахувавши це, запишемо вектор пружних переміщень (1)

$$\begin{aligned}
&u_r = \frac{\partial P}{\partial r} - \nu_1\cos\theta\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}, \qquad u_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial Q}{\partial\theta},\\
&u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} + \nu_1\sin\theta\Phi + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi},
\end{aligned} \tag{10}$$

де $P = r\cos\theta\Phi + \Psi$. Використавши переміщення (10), конкретизуємо вираз деформацій (2)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial u_{\mathrm{r}}}{\partial r} = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \nu_1\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi},\\
&\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\nu_1}{r}\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{\operatorname{ctg}^2\theta Q}{r^2}\frac{\partial Q}{\partial\varphi},\\
&\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{ctg\theta}{r}u_\theta =\\
&\qquad = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi\partial r} + \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right\},\\
&e = -2(1-2\nu)\left[\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right],\\
&\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\theta}{r} = 2\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\frac{P}{r} + \nu_1\left[\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta\partial\varphi} +\\
&\qquad + r\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}Q,\\
&\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{u_\varphi}{r\sin\theta} = \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\frac{P}{\sin\theta} + \frac{\nu_1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} +\\
&\qquad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial Q}{\partial\theta}\right] - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta^2} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 Q}{\partial\theta\partial r},\\
&\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\varphi}{r} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[2\frac{\partial}{\partial r}\frac{P}{r} - \frac{\nu_1}{r}\cos\theta\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right] -\\
&\qquad - r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{Q}{r^2}\right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Підставимо у формули (3) деформації (11) та знайдемо нормальні напруження у сферичній системі координат

$$\sigma_r = 2G\left\{\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - 2(1-\nu)\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{2\nu\sin\theta}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right\},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{r\sin\theta}\left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{(1-2\nu)r}{2}\sin 2\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + (\cos^2\theta + 2\nu\sin^2\theta)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right\},$$

$$\sigma_\theta = 2G\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{2-2\nu}{r}\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + (1-2\nu)\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{r^2}\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right\}.$$

Дотичні напруження дорівнюють відповідним деформаціям (11), помноженим на модуль G.

В роботі побудовано загальне подання розв'язку рівнянь Ламе і тензора напружень у сферичній та еліптичній системах координат. Запропонований вираз тензора напружень дозволяє задовольнити три граничні умови на торцях еліптичного циліндра. Наведені подання вектора переміщень і тензора напружень дають змогу знайти поле напружень у пружному тілі з використанням сферичної та еліптичної системи координат.

1. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: ИД "Академпереодика", 2002. – 342 с.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
3. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
4. *Гузь А. Н.* О расчетных схемах в линеаризированной механике деформируемых тел // Прикл. механика. – 2004. – **40,** No 5. – С. 30–47.
5. *Березюк Т. Б., Григоренко А. Я., Дыяк И. И.* Решение задачи в напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций // Там же. – 2003. – **39,** No 10. – С. 69–74.
6. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Там же. – 2009. – **45**, No 7. – С. 52–65.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 14.03.2010

V. P. Revenko

A representation of the general solution of equations of elasticity theory in spherical and elliptic coordinate systems

The general solution of the Lame equations and representations of the stress tensor in the spherical and elliptic coordinate systems in terms of three independent harmonic functions are presented. Simple requirements for eigenfunctions in the elliptic coordinate system are obtained.