

Б. А. Галанов, И. К. Валеева, С. М. Иванов

Двучленный закон трения Б.В. Дерягина в скользящем контакте шероховатых упругих тел*(Представлено академиком НАН Украины В. В. Скороходом)*

Пропонується модель ковзного адгезійного контакту шершавих пружних тіл з двучленим законом тертя. Шершавість моделюється пружним нелінійним шаром Вінклера–Фусса, який може сприймати розтяг. Механічні властивості шару визначаються статистичними теоріями адгезії номінально плоских шершавих поверхонь. Контакт тіл, що ковзають, описується нелінійними граничними інтегральними рівняннями з немонотонними операторами, розв'язки яких визначають зменшення ефективної товщини шершавого шару, контактні напруження і область контакту. Для розв'язання нелінійних граничних інтегральних рівнянь пропонується метод послідовних наближень.

Диссипативные процессы на поверхностях контакта трущихся тел являются предметом постоянного интереса инженеров и исследователей, стоящих перед выбором материала контактирующих пар тел. Наиболее ранние представления о трении сформулированы в работах Амонтона (1699) и Кулона (1785). Исторические сведения о развитии этих представлений содержатся в [1].

В 1934 г. Б. В. Дерягин [1, 2] предложил двучленный закон трения: $T = \mu(P + Z)$, где T — сила сопротивления скольжению; μ — коэффициент трения; P — сила, прижимающая трущиеся тела одно к другому; Z — равнодействующая сил молекулярного притяжения между телами, зависящая от силы P . Основная сложность применения этого закона (как отмечал Б. В. Дерягин [1]) связана с определением зависимости $Z(P)$. Можис [3] предложил вариант этой зависимости, основанный на теориях адгезионного контакта номинально плоских шероховатых упругих тел, разработанных Джонсоном, Фуллером и Тейбором [4, 5]. В его варианте адгезионный контакт отдельных неровностей поверхностей определяется на основе ДМТ (Дерягин–Муллер–Топоров) теории.

В настоящей работе предлагается модель скользящего адгезионного контакта шероховатых упругих тел с двучленным законом трения. Рассматриваются тела произвольной формы. Шероховатость моделируется упругим нелинейным слоем Винклера–Фусса, воспринимающим растяжение. Механические свойства слоя определяются статистическими теориями адгезионного контакта между плоскими шероховатыми поверхностями [4, 5], номинальное давление между которыми зависит от расстояния между ними d и определяется функцией [3]

$$p(d) = \frac{\eta_s P_c}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{d-\delta_c}^{\infty} g\left(\frac{\delta}{\delta_c}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz, \quad (1)$$

$$\delta = z - d,$$

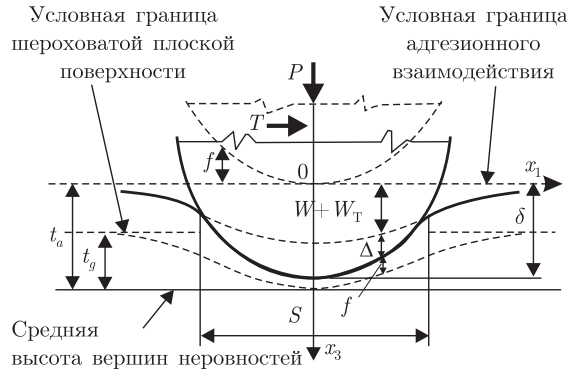


Рис. 1

где $P_c = 1,5\pi wR$; $\delta_c = (3\pi^2 w^2 R / (4K^2))^{1/3}$; $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ (*rms*); σ_1, σ_2 — стандартные отклонения высот неровностей шероховатых поверхностей, имеющих гауссовские распределения; $R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$ — радиус кривизны условных неровностей; w — удельная работа адгезии; $\eta_s = N/A_0$ — количество высот неровностей, приходящееся на единицу площади; $K = 4E^*/3$, E^* — приведенный модуль Юнга; функциональная зависимость $g(\delta/\delta_c)$ определяется теорией, в соответствии с которой взаимодействуют отдельные неровности (например, в случае ДМТ теории $g(\delta/\delta_c) = 3^{-1/2}(\delta/\delta_c)^{3/2} - 4/3$). Графики функций (1) представлены на рис. 4.79 и 4.81 работы [3]. Параметры P_c и δ_c можно рассматривать как характеристики масштабов сил и сближений для отдельных неровностей при малых величинах этих сил и сближений [6], а величину $t_g = 3\sigma$ — как геометрическую полутолщину шероховатого слоя.

С учетом (1) деформационные свойства слоя Винклера–Фусса, моделирующего шероховатость, описываются функцией

$$p = p(\Delta) = \begin{cases} p(d = t_a - \Delta), & \Delta > 0, \\ 0, & \Delta \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где t_a — такое расстояние d между шероховатыми плоскостями, что при $d \geq t_a$ взаимодействием между ними можно пренебречь (величина t_a зависит от отношения δ_c/σ [3]); величина $\Delta > 0$ рассматривается как обжатие шероховатого слоя, которому соответствует номинальное давление p . Принято, что $p > 0$ соответствует сжатию, $p < 0$ — растяжению. Чтобы не увеличивать количество обозначений в (2), принято такое же обозначение для функциональной зависимости, как в (1).

Как известно [3–5], система из шероховатых упругих тел может быть заменена, без ограничения общности, абсолютно жестким телом, находящимся в контакте с шероховатым упругим полупространством. Схема индентирования и скольжения гладкого жесткого тела по шероховатому упругому полупространству $x_3 \geq 0$ показана на рис. 1, где приняты следующие обозначения: P — сила, вдавливающая тело в полупространство; T — касательная сила, вызывающая скольжение вдоль оси x_1 ; δ — сближение контактирующих тел (глубина индентирования); f — зазор между телом и условной границей адгезионного взаимодействия $x_3 = 0$ перед деформацией; W и W_T — нормальные (в направлении оси x_3) упругие перемещения границы полупространства $x_3 = 0$, вызванные силами P и T соответственно; S — номинальная область контакта.

Условия на границе полупространства $x_3 = 0$ имеют следующий вид:

а) внутри номинальной области контакта S

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x}) + W_T(\mathbf{x}) &= \delta - f(\mathbf{x}); \\ \int_S p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= P; \quad \int_S \tau(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = T; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S; \end{aligned} \quad (3)$$

б) вне номинальной области контакта S

$$W(\mathbf{x}) + W_T(\mathbf{x}) > \delta - f(\mathbf{x}); \quad \Delta(\mathbf{x}) = 0; \quad p(\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \notin S, \quad (4)$$

где $p(\mathbf{x})$, $\tau(\mathbf{x})$ — контактное давление и касательные напряжения в области S .

В (3), (4) перемещения W и W_T определяются формулами [7]

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= \lambda \int_S K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \lambda = (\pi E^*)^{-1}, \\ W_T(\mathbf{x}) &= \beta \lambda \int_S L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tau(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in S, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{-1/2}; \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1); \\ \beta &= 0,5[G_2(1 - 2\nu_1) - G_1(1 - 2\nu_2)][G_2(1 - \nu_1) + G_1(1 - \nu_2)]^{-1}; \end{aligned}$$

β — параметр Дундурса, $|\beta| \leq 0,5$ [7]; $G_i = 0,5E_i/(1 + \nu_i)$ — модули сдвига; ν_i и E_i — коэффициенты Пуассона и модули Юнга контактирующих тел.

При ДМТ контактах неровностей из (1), (2) для контактного давления $p(\mathbf{x}) \equiv p(\Delta(\mathbf{x}))$ имеем [3]

$$p(\Delta) = \begin{cases} \frac{\eta_s P_c}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma}{\delta_c}\right)^{3/2} F_{3/2}(d^*) - \frac{4}{3} \eta_s P_c F_0(d^*), & \Delta > 0, \\ 0, & \Delta \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $d^* = d/\sigma = (t_a - \Delta)/\sigma$, $F_n(d^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^n \exp\left[-\frac{1}{2}(t + d^*)^2\right] dt$, $t_a = t_g = 3\sigma$ и обжатие Δ слоя Винклера–Фусса зависит от $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

В соответствии с двучленным законом трения [1, 2] и ДМТ контактов неровностей [3, с. 342] для касательных напряжений $\tau(\mathbf{x})$ имеем

$$\begin{aligned} \tau &= \mu(p + z) \equiv \mu \tilde{p}(\Delta); \\ \tilde{p}(\Delta) &= \begin{cases} \frac{\eta_s P_c}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma}{\delta_c}\right)^{3/2} F_{3/2}(d^*), & \Delta > 0, \\ 0, & \Delta \leq 0, \end{cases} \quad d^* = \frac{t_a - \Delta}{\sigma}. \end{aligned} \quad (7)$$

При заданных величинах P , T и $f(\mathbf{x})$ граничные условия (3), (4) и соотношения (5)–(7) образуют полную формулировку задачи скользящего адгезионного контакта шероховатых

упругих тел, которая позволяет определить величины $\Delta(\mathbf{x})$, S , δ и, следовательно, контактное давление $p(\mathbf{x})$ и касательные напряжения $\tau(\mathbf{x})$ по формулам (6), (7). По форме эта формулировка не отличается от обычных формулировок задач контакта упругих тел (гладких и шероховатых) [7–10]. Поэтому задачу решения системы равенств и неравенств (3)–(7), аналогично [10], можно заменить более простой задачей решения следующих нелинейных граничных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) + \lambda \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(u(\mathbf{y})) d\mathbf{y} + \mu\beta\lambda \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{p}(u(\mathbf{y})) d\mathbf{y} &= \delta - f(\mathbf{x}), \\ \int_{\Omega} p(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = P, \quad \mu \int_{\Omega} \tilde{p}(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = T, & \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega, \quad S \subseteq \Omega, & \end{aligned} \quad (8)$$

с неизвестной функцией $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ и неизвестным сближением δ . Ω — произвольная область, содержащая номинальную область контакта S .

Если функция $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, — решение уравнения (8), то функция $\Delta(\mathbf{x}) = u^+(\mathbf{x}) = \sup\{u(\mathbf{x}), 0\}$ определяет обжатие шероховатого слоя, функция $(-u^-(\mathbf{x}) = -\inf\{u(\mathbf{x}), 0\})$ определяет номинальный зазор между контактирующими телами после деформации (внутри области контакта S этот зазор равен 0), $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2): u(\mathbf{x}) \geq 0\}$ — номинальная контактная область, которая может быть многосвязной.

Из двучленного закона трения [3, с. 340, рис. 4.84] следует, что вклад адгезионной составляющей силы трения

$$T_a = \mu \int_{\Omega} (\tilde{p}(\mathbf{x}) - p^+(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad p^+(\mathbf{x}) = \sup\{p(\mathbf{x}), 0\}$$

в общую силу трения

$$T = \mu \int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

оценивается отношением

$$C_a = \frac{T_a}{T} = \frac{\int_{\Omega} (\tilde{p}(\mathbf{x}) - p^+(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \tilde{p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \leq 1, \quad (9)$$

где $p(\mathbf{x}) \equiv p(u^+(\mathbf{x}))$ — нормальное номинальное контактное давление; $\tau(\mathbf{x}) = \mu\tilde{p}(\mathbf{x}) \equiv \mu\tilde{p}(u^+(\mathbf{x}))$ — номинальные сдвиговые напряжения в области контакта; $u(\mathbf{x})$ — решение уравнения (8); $C_a = 0$ при $w = 0$ и $C_a = 1$, если $p(\mathbf{x}) < 0$.

Напомним, что модель (8) сформулирована при ДМТ контактах одиночных неровностей (см. (6), (7), [3]). Аналогично могут быть построены модели в случаях других контактов одиночных неровностей, например, в случае ДКР (Джонсон–Кендалл–Робертс) контактов и контактов Можиса [3].

Далее δ рассматривается как параметр и исследуется первое уравнение (8).

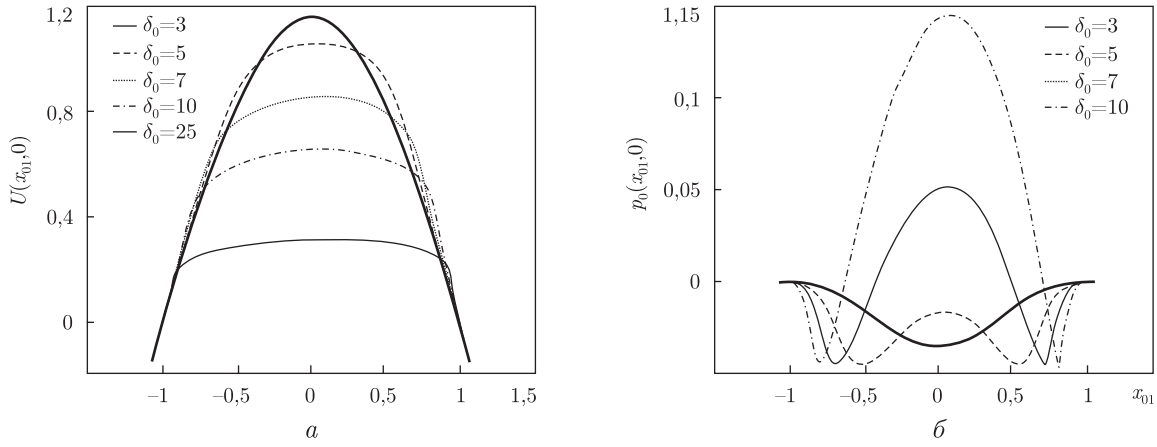


Рис. 2

Задача (8) является задачей нормального контакта при $\mu = 0$ [11]. Для $\mu \neq 0$ и $\beta = 0$ распределение нормального контактного давления $p(u(\mathbf{x}))$ не зависит от силы трения.

Если $f(\mathbf{x}) = A|\mathbf{x}|^k$, $k \geq 1$, то, вводя безразмерные величины $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$, $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02})$, U , δ_0 , p_0 , p_1 , Ω_0 , S_0

$$\mathbf{x}_0 = \left(\frac{A}{\delta}\right)^{1/k} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_0 = \left(\frac{A}{\delta}\right)^{1/k} \mathbf{y}, \quad U(\mathbf{x}_0) = u\left(\mathbf{x}_0 \left(\frac{\delta}{A}\right)^{1/k}\right) \delta^{-1}, \quad \delta_0 = \frac{\delta}{\delta_c},$$

$$p_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) = \lambda \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} p(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)),$$

$$p_1(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)) = \frac{4}{3} \lambda \eta_s P_c \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} F_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)),$$
(10)

первое уравнение (8) приводится к следующему безразмерному уравнению:

$$U(\mathbf{x}_0) + \delta_0^{(1-k)/k} \int_{\Omega_0} K(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) p_0(\delta_0 U(\mathbf{y}_0)) d\mathbf{y}_0 +$$

$$+ \mu \beta \delta_0^{(1-k)/k} \int_{\Omega_0} L(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \tilde{p}_0(\delta_0 U(\mathbf{y}_0)) d\mathbf{y}_0 = 1 - |\mathbf{x}_0|^k, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \Omega_0,$$
(11)

где $\tilde{p}_0(\delta_0 U(\mathbf{y}_0)) = p_0(\delta_0 U(\mathbf{y}_0)) + p_1(\delta_0 U(\mathbf{y}_0))$, $\Omega_0 = (|x_{01}| \leq 1 + \varepsilon; |x_{02}| \leq 1 + \varepsilon)$; S_0 — безразмерная область контакта ($S_0 \subseteq \Omega_0$, $\varepsilon = \text{const}$), и для касательных напряжений имеем:

$$\tau(\mathbf{x}_0) = \mu \lambda^{-1} \delta_c^{(k-1)/k} A^{1/k} \tilde{p}_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0)).$$
(12)

Решение $U(\mathbf{x}_0)$ уравнения (11) зависит от параметра $\delta_0 \geq 0$, величина которого при расчетах задается.

При дискретизации (11) ($\varepsilon = 0,1$) использовался метод коллокации и соответствующее дискретное уравнение решалось модифицированным методом Ньютона. На рис. 2 даны результаты расчета для следующих величин безразмерных параметров: $\delta_0 = 3; 5; 7; 10; 25$, $\mu\beta = 0,398$, $\delta_c/\sigma = 0,625$, $\lambda\eta_s P_c \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} = 0,239$, $k = 2$. При $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, 0)$ показаны: безразмерная функция $U(\mathbf{x}_0)$ (рис. 2, a) и безразмерное номинальное контактное давление

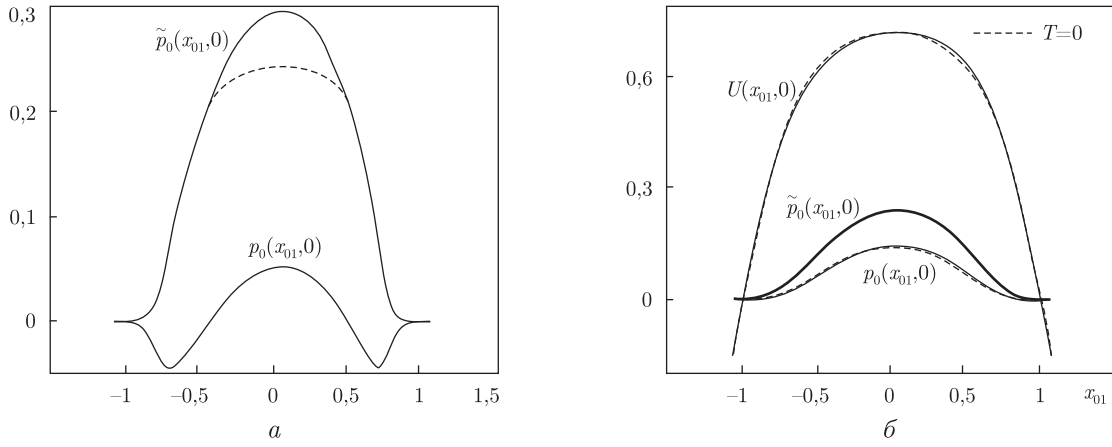


Рис. 3

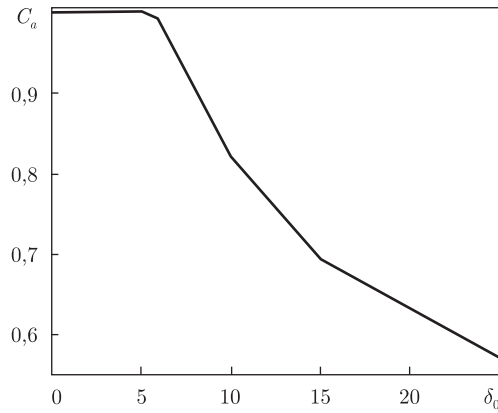


Рис. 4

$p_0(\mathbf{x}_0) \equiv p_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0))$ (рис. 2, б). Функция $U^+(\mathbf{x}_0)$ определяет обжатие шероховатого слоя Δ , т. е. $\Delta = \delta U^+(\mathbf{x}_0)$. Безразмерные номинальные сдвиговые напряжения $\tilde{p}_0(\mathbf{x}_0) \equiv \tilde{p}_0(\delta_0 U(\mathbf{x}_0))$ (см. (12)) и номинальное контактное давление $p_0(\mathbf{x}_0)$ при $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, 0)$ и $\delta_0 = 7$ представлены на рис. 3, а. Штриховой линией показана адгезионная составляющая $(\tilde{p}_0(\mathbf{x}_0) - p_0^+(\mathbf{x}_0))$ напряжений $\tilde{p}_0(\mathbf{x}_0)$. При параметре $\delta^* = \delta_c/\sigma = 0,625$, характеризующем шероховатость, функция (1) меняет знак и, как видно из рисунка, контактное давление $p_0(\mathbf{x}_0)$ также меняет знак в области контакта (вблизи границы области контакта оно отрицательное). Если $\delta^* = \delta_c/\sigma = 0,23$, то функция (1) и контактное давление $p_0(\mathbf{x}_0)$ (практически) не меняют знака ($p_0(\mathbf{x}_0) > 0$) и адгезия на номинальном контактном давлении не проявляется, хотя адгезия отдельных неровностей существует. Эта адгезия является причиной существования адгезионной составляющей $(\tilde{p}_0(\mathbf{x}_0) - p_0(\mathbf{x}_0))$ в межповерхностных сдвиговых напряжениях $\tilde{p}_0(\mathbf{x}_0)$, как это видно на рис. 3, б для $\delta_0 = 15$. На рис. 2, 3 можно заметить несимметрию величин (относительно начала координат), которая вызвана силой T . Зависимость C_a от δ_0 (см. (9)) для системы с параметрами $\mu\beta = 0,398$, $\delta_c/\sigma = 0,625$, $\lambda\eta_s P_c \delta_c^{(1-k)/k} A^{-1/k} = 0,239$, $k = 2$ представлена на рис. 4.

Предложенная модель скользящего контакта предсказывает межповерхностные номинальные сдвиговые напряжения при отрицательном (адгезионном) номинальном контактном давлении. Как и в классическом скользящем контакте, сдвиговые напряжения ма-

ло влияют на нормальные контактные напряжения, а сдвиговые напряжения определяются нормальным контактным давлением. При положительном контактном давлении эта модель предсказывает также существование адгезионной компоненты межповерхностных сдвиговых напряжений. В этом случае номинальная адгезионная составляющая нормальных контактных напряжений отсутствует, в то время как адгезия отдельных неровностей (как сжатых, так и растянутых) существует. Эта адгезия является причиной адгезионной компоненты межповерхностных сдвиговых напряжений.

Метод нелинейных граничных уравнений дает надежное теоретическое обоснование модели скользящего адгезионного контакта упругих шероховатых тел и ее численных реализаций. Он может быть применен к контактным задачам упругих шероховатых тел со сложной геометрией, в том числе с невыпуклой формой и в случаях многосвязных контактных областей.

Авторы выражают благодарность Leverhulme Trust (United Kingdom) за финансовую поддержку участия в рабочем совещании ADHESINT-3 (1–3 июля 2009 г., Санкт-Петербург, Россия).

1. Дерягин Б. В. Что такое трение? – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 232 с.
2. Дерягин Б. В. Молекулярная теория трения и скольжения // Журн. физ. химии. – 1934. – 5. – С. 1165–1172.
3. Maugis D. Contact, Adhesion and rupture of elastic solids. – Berlin: Springer, 2000. – 414 p.
4. Johnson K. L. Non-Hertzian contact of elastic spheres // The mechanics of the contact between deformable bodies, Ed. by A. D. de Pater, J. J. Kalker. – Delft: University Press, 1975. – P. 26–40.
5. Fuller K. N. G., Tabor D. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1975. – 345. – P. 327–342.
6. Borodich F. M., Galanov B. A. Non-direct estimations of adhesive and elastic properties of materials by depth-sensing indentation // Proc. R. Soc. A. – 2008. – 464. – P. 2759–2776.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Наука, 1989. – 510 с.
8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
9. Goryacheva I. G. Mechanics of discrete contact // Tribology Intern. – 2006. – 39, No 5. – P. 381–386.
10. Галанов Б. А. Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упругопластических деформациях неровностей // Прикл. математика. и механика. – 1984. – 48, № 6. – С. 1020–1029.
11. Галанов Б. А. Адгезия шероховатых упругих тел // Математ. модели и вычислит. эксперимент в материаловедении. Вып. 10: Тр. ИПМ им. И. Н. Францевича НАН Украины. Сер. Моделирование в материаловедении. – Киев, 2008. – С. 98–112.

*Институт проблем материаловедения
им. И. Н. Францевича НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 30.11.2009

B. A. Galanov, I. K. Valeeva, S. M. Ivanov

Two-term friction law of B. V. Deryagin for a sliding contact of rough elastic bodies

A model of sliding adhesive contact between rough elastic bodies with a two-term friction law is suggested. Roughness is simulated by a Winkler–Fuss nonlinear elastic layer which can be stretched. Mechanical properties of the layer are determined by statistical theories of adhesive contact between nominally flat rough surfaces. The sliding contact of solids is described by the nonlinear boundary integral equations with non-monotonic operators, solutions of which determine a reduction of the effective thickness of the rough layer, contact stresses, and contact region. For solving the nonlinear boundary integral equations, the method of successive approximations is proposed.