УДК 517.984

В. А. Михайлец, В. Н. Молибога

Осцилляционные свойства решений задачи Штурма–Лиувилля с сингулярным коэффициентом

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Досліджено осциляційні властивості нетривіальних розв'язків рівняння Штурма–Ліувілля із сингулярним дійсним коефіцієнтом з негативного простору Соболева $W_2^{-1}[a,b]$. Знайдено аналоги класичних теорем Штурма про чергування, порівняння та осциляцію. Встановлено, що число від'ємних власних значень крайової задачі Діріхле дорівнює числу нулів у інтервалі (a,b) нетривіального розв'язку $y(x)$ однорідного рівняння з умовою $y(a) = 0$.

Предварительные сведения и лемма. Пусть (a,b) — конечный интервал, функция $Q \in \in \mathscr{L}^2([a,b];\mathbb{R})$. Исследуем осцилляционные свойства нетривиальных решений однородного уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = 0, \qquad x \in (a,b), \qquad q = Q', \tag{1}$$

где производная понимается в смысле обобщенных функций. Следуя работе [1], определим решение резольвентного уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + f(x), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad f(x) \in L^2[a,b], \tag{2}$$

как первую компоненту решения системы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} Q(x) & 1 \\ -\lambda - Q^2(x) & -Q(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $y_1(x) := y(x)$, $y_2(x) \equiv y^{[1]}(x) := y'(x) - Q(x)y(x)$. В сделанных нами предположениях система (3) удовлетворяет условиям [2, § 16, теорема 1], и поэтому решение $y(x)$ уравнения (2) определено корректно. При этом действие дифференциального выражения

$$l[y] = -y'' + q(x)y, \qquad q = Q'$$

по определению совпадает с действием *квази*дифференциального выражения

$$l[y] := -(y' - Q(x)y)' - Q(x)(y' - Q(x)y) - Q^2(x)y.$$

Чтобы формулировать условия теорем о перемежаемости и сравнении для нетривиальных решений пары однородных уравнений

$$-y'' + q_1(x)y = 0, \tag{4}$$

$$-z'' + q_2(x)z = 0, \tag{5}$$

нам потребуется сравнивать между собой распределения $q_1 = Q_1'$ и $q_2 = Q_2'$. Как известно [3, с. 29], обобщенная функция $f \in \mathfrak{D}'(a,b)$ называется неотрицательной в интервале (a,b), если

$$\langle f, \varphi \rangle \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \varphi(x) \in C_0^\infty(a,b).$$

Известно описание множества всех неотрицательных распределений. Его дает

Теорема (Л. Шварц [3, гл. 1, § 1.7, теорема 2]). *Для того чтобы обобщенная функция $f \in \mathfrak{D}'(a,b)$ была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы она была неотрицательной мерой.*

Из теоремы Рисса о линейных непрерывных функционалах на пространстве $C([a,b];\mathbb{R})$ вытекает, что каждой неотрицательной мере соответствует некоторая (определяемая неоднозначно) монотонно неубывающая на $[a,b]$ функция σ такая, что

$$\langle f, \varphi \rangle = (R-S)\int\limits_a^b \varphi(x)\,d\sigma(x), \qquad \varphi(x) \in C[a,b].$$

Сформулируем лемму, которая лежит в основе доказательств теорем о перемежаемости и сравнении.

Лемма А. *Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — решения уравнений* (4) *и* (5) *соответственно, а $y^{[1]_1}(x) = y'(x) - Q_1(x)y(x)$, $z^{[1]_2}(x) = z'(x) - Q_2(x)z(x)$ — соответствующие им квазипроизводные. Пусть*

$$q_1 \geqslant q_2, \qquad x \in [a,b], \qquad \textit{т. е.} \qquad \sigma(x) := (Q_1(x) - Q_2(x)) \uparrow. \tag{$*$}$$

Тогда для произвольных значений x_1, $x_2 \in [a,b]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^{[1]_1}(t)z(t) - y(t)z^{[1]_2}(t)) = -\sigma(t)(y(t)z(t))' \qquad \textit{п.в.}, \tag{6}$$

$$(y^{[1]_1}(t)z(t) - y(t)z^{[1]_2}(t))\Big|_{x_1}^{x_2} = -(\sigma(t)y(t)z(t))\Big|_{x_1}^{x_2} + (R-S)\int\limits_{x_1}^{x_2} y(t)z(t)\,d\sigma(t). \tag{7}$$

Доказательство. Справедливость соотношения (6) доказывается прямым дифференцированием функции

$$W[y,z] = y^{[1]_1}(t)z(t) - y(t)z^{[1]_2}(t) \in W_1^1[a,b]$$

с учетом следующих соотношений:

$$-(y^{[1]_1})' - Q_1 y^{[1]_1} - Q_1^2 y = 0,$$

$$-(z^{[1]_2})' - Q_2 z^{[1]_2} - Q_2^2 z = 0,$$

$$y, z, y^{[1]_1}, z^{[1]_2} \in W_1^1[a,b].$$

Докажем равенство (7). Интеграл Римана–Стильтьеса в ее правой части существует, так как функция $y(t)z(t) \in W_1^1[a,b]$. Тогда (см. [4, гл. VIII, § 6, п. 5]) существует также второй интеграл в формуле интегрирования по частям и

$$(R-S)\int\limits_{x_1}^{x_2} y(t)z(t)\,d\sigma(t) + (R-S)\int\limits_{x_1}^{x_2} \sigma(t)\,d(y(t)z(t)) = [\sigma(t)y(t)z(t)]_{x_1}^{x_2}.$$

Принимая во внимание, что

$$(L)\int\limits_{x_1}^{x_2}\sigma(t)(y(t)z(t))'\,dt=(R-S)\int\limits_{x_1}^{x_2}\sigma(t)\,d(y(t)z(t)),$$

интегрируя уже доказанное равенство (6), получаем нужное соотношение.

Основные результаты. Сформулируем теоремы о распределении нулей нетривиальных (вещественных) решений однородных дифференциальных уравнений (4), (5).

Теорема 1 (о перемежаемости нулей). *Пусть выполнено неравенство* $(*)$. *Тогда между каждыми двумя нулями нетривиального решения* $y(x)$ *уравнения* (4) *найдется хотя бы один нуль каждого из решений* $z(x)$ *уравнения* (5).

Замечание 1. Пусть в условиях теоремы 1 функция $\sigma(x)=\mathrm{const}$, $x\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$. Тогда:

1) либо $z(x)$ имеет только один нуль в интервале (x_1,x_2), причем $z(x_1)\neq 0$, $z(x_2)\neq 0$;

2) либо $z(x)$ отличается от $y(x)$ в интервале $[x_1,x_2]$ только постоянным множителем и $z(x_1)=0$, $z(x_2)=0$.

Следствие 1. *Нули нетривиального решения* $y(\lambda,x)$ *уравнения*

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\qquad x\in[a,b],\qquad \lambda\in\mathbb{R},\tag{8}$$

с возрастанием λ *двигаются влево, за исключением возможного нуля в точке* $x=a$.

Следствие 2. *Нули нетривиальных решений уравнения* (8) *перемежаются.*

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 2 (о сравнении нулей). *Пусть* $y(x)$ *есть решение уравнения* (4), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(a)=\sin\alpha,\qquad y^{[1]_1}(a)=\cos\alpha,\tag{9}$$

а $z(x)$ *— решение уравнения (5) с такими же начальными условиями*

$$z(a)=\sin\alpha,\qquad z^{[1]_2}(a)=\cos\alpha\tag{10}$$

при $0\leqslant\alpha<\pi$. *Пусть выполнено неравенство* $(*)$. *Тогда если* $y(x)$ *в интервале* $a<x\leqslant b$ *имеет* m *нулей, то* $z(x)$ *в том же интервале имеет не меньше чем* m *нулей и* k*-нуль* $z(x)$ *не больше* k*-го нуля* $y(x)$, $k=1,\ldots,m$.

Теорема 3 (численного сравнения). *Пусть* $x_0\in[a,b]$ *и* $y(x)$ *есть решение уравнения* (4), *удовлетворяющее начальным условиям* (9), *а* $z(x)$ *— решение уравнения* (5) *с начальными условиями* (10), *и справедливо строгое неравенство* $(*)$, *т. е.,* $\sigma(x)\uparrow\uparrow$, $x\in[a,b]$.

Тогда в произвольной правосторонней окрестности точки x_0, *в которой* $z(x)$ *нигде не обращается в нуль (за исключением, быть может, самой точки* $x=x_0$), *справедливо неравенство*

$$|y(x)|>|z(x)|.$$

Более того, отношение $y(x)/z(x)$ *является функцией* x, *возрастающей от значения 1, которое оно принимает при* $x=x_0$.

Замечание 2. В формулировке теоремы 3 условие $q_1>q_2$ можно заменить более общим требованием $(*)$, если функция $\sigma(x)\uparrow\uparrow$ на $[x_0,b]$.

С учетом леммы A доказательства приведенных теорем проводятся по той же схеме, что и в классическом случае [5, 6].

Теорема 4 (об осцилляции). *Собственные значения краевой задачи Штурма–Лиувилля с разделенными краевыми условиями:*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in (a, b),$$
$$\cos\alpha y(a) - \sin\alpha y^{[1]}(a) = 0, \qquad 0 \leqslant \alpha < \pi,$$
$$\cos\beta y(b) - \sin\beta y^{[1]}(b) = 0, \qquad 0 < \beta \leqslant \pi,$$

простые и образуют вещественную, возрастающую последовательность

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

При этом собственная функция $y_n(x)$, отвечающая собственному значению λ_n, имеет ровно n нулей в интервале (a, b).

Теоремы о перемежаемости и осцилляции позволяют установить следующий важный для приложений результат.

Теорема 5. *Количество отрицательных (не положительных) собственных значений краевой задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле:*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in (a, b),$$
$$y(a) = y(b) = 0,$$

равняется количеству нулей нетривиального решения $y(x)$ в интервале (a, b) (соответственно $(a, b]$) краевой задачи с граничным условием Дирихле на левом конце:

$$-y'' + q(x)y = 0, \qquad y(a) = 0.$$

Отметим, что приведенные выше теоремы дополняют и частично обобщают результаты [7] на случай более общих, чем меры коэффициентов q. Утверждения теорем 2, 3, 5 являются новыми и для мер. Они также дополняют и расширяют результаты работы [8] об осцилляционных свойствах решений задачи Дирихле при вариации спектрального параметра.

Исследование поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант 28.1/017.

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. мат. об-ва. – 2003. – **64**. – С. 159–212.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
3. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1971. – 280 с.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – Москва: Наука, 1957. – 552 с.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. – Москва: Иностр. лит., 1962. – 352 с.
6. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. – Москва: Наука, 1970. – 672 с.
7. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи мат. наук. – 2008. – **63**, № 1. – С. 111–154.

8. *Шкаликов А. А., Бен Амара Ж.* Осцилляционные теоремы для задач Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. и мех. – 2009. – № 3. – С. 43–49.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 14.01.2010*

V. A. Mikhailets, V. N. Molyboga

Oscillation properties of solutions of the Sturm–Liouville problem with a singular coefficient

We study oscillation properties of non-trivial solutions of the Sturm–Liouville equation with a singular real-valued coefficient from the negative Sobolev space $W_2^{-1}[a,b]$. Analogs of the classical Sturm theorems about interlacing, comparison, and oscillation are found. The number of negative eigenvalues of the Dirichlet boundary-value problem is found equal to the number of zeros in the interval (a,b) of a non-trivial solution $y(x)$ of the homogeneous equation with the condition $y(a) = 0$.