УДК 517.5

Е. С. Смоловая

Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Досліджується проблема продовження на межу так званих кільцевих Q-гомеоморфізмів між областями в метричних просторах із мірами. Формулюються умови на функцію $Q(x)$ та межі областей, при яких усякий кільцевий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу. Результати застосовані, зокрема, до ріманових многовидів, просторів Левнера, груп Карно та Гейзенберга.

В работе [1] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии легло в основу определения так называемых Q-гомеоморфизмов. В последние годы на плоскости и в пространстве активно изучается более широкий класс кольцевых Q-гомеоморфизмов (см., напр., [2]). Это понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу [3] и представляет собой обобщение и локализацию этого определения, которое впервые было введено и использовалось для изучения уравнений Бельтрами на плоскости в работе [4].

Проблема граничного поведения является одной из центральных тем теории квазиконформных отображений и их обобщений (см., напр., [5] и дальнейшие ссылки там же). Систематическое изучение структур границ односвязных областей на плоскости началось в свое время с трудов Каратеодори [6] и привело к созданию теории простых концов (см., напр., [7]). Области со слабо плоскими границами, используемые нами, — наиболее широкий из известных классов областей, граничное соответствие между которыми при квазиконформных отображениях и их обощениях осуществляется поточечно, а не по простым концам (см., напр., [2]). Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ изучалось в работе [8]. В статье [5] была построена теория граничного поведения для Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах. В данной работе эта теория распространяется на кольцевые Q-гомеоморфизмы в метрических пространствах. Ранее модульная техника в метрических пространствах изучалась в работах [9–12] и др.

1. О кольцевых Q-гомеоморфизмах в метрических пространствах. Обозначим (X, d, μ) пространство X с метрикой d и локально конечной борелевой мерой μ. Областью в X будем называть открытое множество, любые две точки которого можно связать непрерывной кривой. Пусть G — область в X с хаусдорфовой размерностью $\alpha > 1$. Модуль семейств кривых Γ в области G задается равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_G \rho^{\alpha}(x)\, d\mu(x), \tag{1}$$

где допустимые функции для Γ определяются условием вида (2). Напомним, что борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут

$\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \geqslant 1 \tag{2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Напомним также, что если $\gamma\colon [a,b] \to X$ — непрерывная кривая в метрическом пространстве (X,d), то ее длина есть супремум сумм $\sum d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$ над всеми разбиениями $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_k = b$ интервала $[a,b]$.

Пусть G и G' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями α и $\alpha' > 1$ в пространствах (X,d,μ) и (X',d',μ') и пусть $Q\colon G \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Говорим (ср. [5]), что гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{G}$, если

$$M(\triangle(f\mathrm{C}_0, f\mathrm{C}_1, G')) \leqslant \int\limits_{A\cap G} Q(x)\cdot \eta^{\alpha}(d(x,x_0))\, d\mu(x) \tag{3}$$

выполняется для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in X\colon r_1 < d(x,x_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $\mathrm{C}_0 \subset \overline{B(x_0,r_1)}$ и $\mathrm{C}_1 \subset X\setminus B(x_0,r_2)$ в области G и любой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{4}$$

Говорят, что пространство (X,d,μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0,r)) \leqslant Cr^{\alpha} \tag{5}$$

для всех шаров $B(x_0,r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Говорят также, что пространство (X,d,μ) *α-регулярно сверху*, если условие (5) выполнено в каждой точке (см., напр., [10]).

Пусть G — область в пространстве (X,d,μ). Следуя [5], говорим, что функция $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{G}$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_{\varepsilon}|\, d\mu(x) < \infty, \tag{6}$$

где

$$\overline{\varphi}_{\varepsilon} = -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x) -$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по множеству $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G\colon d(x,x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (6) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому множеству $G(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

2. О слабо плоских и сильно достижимых границах. В $\mathbb{R}^n$ следующие понятия введены в [13], а в метрических пространствах — в [5].

Говорят, что граница области G *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset G$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geqslant \delta \tag{7}$$

для любого континуума F в G, пересекающего ∂U и ∂V. Говорят также, что граница ∂G *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geqslant P \tag{8}$$

для любых континуумов E и F в G, пересекающих ∂U и ∂V. Известно, что ∂G сильно достижима из G в точке x_0, если ∂G слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$. Кроме того, G локально линейно связна в $x_0 \in \partial G$, если ∂G слабо плоская в точке x_0. Напомним, что область G называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \bigcap G$ связно.

3. О непрерывном продолжении на границу.

Теорема 1. *Пусть G локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ — компакт и $\partial G'$ сильно достижима. Если измеримая функция $Q\colon G \to [0, \infty]$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x, x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $G(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in G\colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$, для $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Теорема 2. *Пусть X α-регулярно сверху в точке $x_0 \in \partial G$, $\alpha \geqslant 2$, где G локально линейно связна и удовлетворяет условию*

$$\mu(G \bigcap B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \log^{\alpha-2} \frac{1}{r} \cdot \mu(G \bigcap B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{10}$$

а $\overline{G'}$ компактно и $\partial G'$ сильно достижима. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Заметим, что условие Салимова (10) из [5] слабее хорошо известного условия удвоения меры на границе

$$\mu(G \bigcap B(x_0, 2r)) \leqslant \gamma \cdot \mu(G \bigcap B(x_0, r)) \tag{11}$$

(ср., напр., [10]).

4. О продолжении на границу обратных отображений.

Теорема 3. *Пусть G локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{G}$ — компакт, G' имеет слабо плоскую границу, а $f\colon G \to G'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм во всех граничных точках с $Q \in L^1_\mu(G)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}\colon G' \to G$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{G'} \to \overline{G}$.*

5. О гомеоморфном продолжении на границу.

Теорема 4. *Пусть G и G' имеют слабо плоские границы, а $\overline{G}$ и $\overline{G'}$ — компакты и пусть $Q\colon G \to [0,\infty]$ — функция класса $L^1_\mu(G)$ с*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{12}$$

в каждой точке $x_0 \in \partial G$, где $G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G\colon \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x,x_0)$. Тогда любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.

Теорема 5. *Пусть G — область в α-регулярном сверху пространстве (X,d,μ), $\alpha \geqslant 2$, которая локально линейно связна и удовлетворяет условию (10) во всех граничных точках, G' — область в пространстве (X',d',μ') со слабо плоской границей, а $\overline{G}$ и $\overline{G'}$ — компакты. Если функция $Q\colon G \to [0,\infty]$ имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon G \to G'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Последняя теорема является далеко идущим обобщением известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины (см. [14], с. 196, ср. также [15]). Отметим, что в монографии [2] приведен пример, показывающий, что слабо плоские границы образуют более широкий класс, чем границы равномерных областей и областей квазиэкстремальной длины даже на плоскости. Заметим также, что здесь не предполагается односвязность областей. Таким образом, результаты работы обобщают и усиливают известные теоремы для квазиконформных отображений на кольцевые Q-гомеоморфизмы в метрических пространствах, которые являются их естественным обобщением (см., напр., [5, 14] и др.). Результаты применимы, в частности, к римановым многообразиям, недавно введенным пространствам Левнера, а также хорошо известным группам Карно и Гейзенберга (см., напр., [10]).

1. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
3. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
4. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.
5. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2007. – **4**, No 2. – P. 199–234.
6. *Caratheodory C.* Über die Begrenzung der einfachzusammenhängender Gebiete // Math. Ann. – 1913. – **73**. – P. 323–370.
7. *Суворов Г. Д.* Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченным интегралом Дирихле. – Киев: Наук. думка, 1981. – 168 с.
8. *Ломако Т. В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, No 10. – С. 1329–1337.
9. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
10. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001. – 140 p.
11. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – **181**, No 1. – P. 1–61.
12. *Martio O.* Modern tools in the theory of quasiconformal maps // Texts in Math. Ser. B. Univ. Combra, Dept. Mat., Coimbra. – 2000. – **27**. – P. 1–43.

13. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории границ пространственных областей // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2006. – **13**. – С. 110–120.
14. *Gehring F. W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. d'Anal. Math. – 1985. – **24**. – P. 181–206.
15. *Martio O., Vuorinen M.* Whitney cubes, p-capacity and Minkowski content // Expo. Math. – 1987. – **5**. – P. 17–40.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 04.01.2010

E. S. Smolovaya

Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces

The problem of extension to the boundary of the so-called ring Q-homeomorphisms between domains in metric spaces with measures is investigated. Conditions on functions $Q(x)$ and boundaries of domains, under which every ring Q-homeomorphism admits a continuous or homeomorphic extension to the boundary, are formulated. These results are applicable, in particular, to Riemannian manifolds, the Loeuner spaces, the Carnot and Heisenberg groups.