УДК 517.36

А. С. Хорошун

О параметрической устойчивости нелинейных неточных сингулярно возмущенных систем

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Досліджено клас сингулярно збурених систем, що містять параметри. На основі застосування методу порівняння із векторною функцією Ляпунова отримано достатні умови абсолютної параметричної стійкості таких систем.

В настоящей работе, концепция параметрической устойчивости, предложенная в [1] и затем развитая в [2–5], применяется для исследования свойств устойчивости сингулярно возмущенных систем, зависящих от некоторых параметров (см. [6]). Состояние равновесия, в отличие от общепринятого подхода, предполагается не фиксированным в начале координат, а способным менять свое местоположение в зависимости от значений параметров.

Применение концепции параметрической устойчивости и метода сравнения с двухкомнонентной функцией Ляпунова позволяет определить область в пространстве параметров, для значений параметров из которой существует состояние равновесия исследуемой системы, и указать достаточные условия его глобальной асимптотической устойчивости. На основе полученных результатов исследована задача об управлении электромотором постоянного тока.

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную неточную сингулярно возмущенную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)z + q_1(p)\varphi(r - C(p)x), \\ \varepsilon\dot{z} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)z + q_2(p)\varphi(r - C(p)x), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $z(t) \in \mathbb{R}^m$ — переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in \mathbb{R}^+$; $r \in \mathbb{R}^s$ — корректирующий вектор, матрицы $A_{ij}(p)$, $C(p)$, $q_i(p)$, i, $j = 1, 2$, имеют соответствующую размерность и элементы, непрерывно зависящие от векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$. Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^s$ — нелинейная непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $\varphi(0) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\Big|_{u=0} = I$, где $I \in \mathbb{R}^{s\times s}$ — единичная матрица. Предполагаем, что при любом заданном начальном состоянии $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$, фиксированном значении параметра p и непрерывном управлении u система уравнений (1) имеет единственное решение $(x(t; x_0, z_0, p, u), z(t; x_0, z_0 p, u))$ при всех $t \geqslant t_0$.

Относительно системы (1) сделаем следующее предположения.

Предположение 1.

1. Матрица $A_{22}(p)$ невырождена при всех $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$.

2. Существует значение параметра $p^* \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ такое, что матрицы A_{22} и $K_0(p) = A_0(p) - q_0(p)\dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\Big|_{u=0} C(p)$, *где* $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, устойчивы в точке $p = p^*$.

Замечание 1. Поскольку в точке $p = p^*$ матрица $A_{22}(p)$ устойчива, то она и невырождена в этой точке. Оценим область в пространстве параметров $\Omega_p = \{p \in \mathbb{R}^l \| p-p^*| \leqslant b\}$, для всех значений параметра p из которой матрица $A_{22}(p)$ невырождена. Представим матрицу $A_{22}(p)$ в виде $A_{22}(p) = A_{22}(p^*) + B(p) = A_{22}(p^*)(I + A_{22}^{-1}(p)B(p))$. Поскольку матрица $A_{22}(p^*)$ невырождена, то невырожденность матрицы $A_{22}(p)$ эквивалентна невырожденности матрицы $I+A_{22}^{-1}(p)B(p)$, что равносильно условию $\|A_{22}^{-1}(p)B(p)\| < 1$. Так как $B(p) = A_{22}-A_{22}(p^*)$, то окончательно получим, что для невырожденности матрицы $A_{22}(p)$ в области Ω_p требуется, чтобы для всех $p \in \Omega_p$ выполнялось следующее неравенство: $\|A_{22}(p^*)(A_{22} - A_{22}(p^*))\| < 1$. Используя разложение элементов матрицы $A_{22}(p)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $p = p^*$, получим неравенство $\|A_{22}^{-1}(p^*)\| \max\limits_{p\in\Omega_p} \left\| \dfrac{\partial A(p)}{\partial p} \right\| b < 1$, которое позволяет оценить область Ω_p. Таким образом, область $P \in \Omega_p$.

Отметим, что при сделанных выше предположениях система (1) имеет неподвижное состояние равновесия в начале координат для всех значениях параметра p, если значение корректирующего вектора равно 0. Однако, если $r \neq 0$, то состояние равновесия становится подвижным из-за изменения значений параметров p и r. Свойства устойчивости этого состояния равновесия также будут зависимы от указанных параметров. В работе будут установлены достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости системы (1) в виде секторного условия на функцию и указан подход для оценки области в пространстве параметров, относительно которой такая устойчивость имеет место.

Существование состояния равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы. Состояние равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы, если оно существует, имеет вид $(x^e(p,r), z^e(p,r))$, где $x^e(p,r)$ и $z^e(p,r)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} 0 = A_{11}(p)x^e + A_{12}(p)z^e + q_1(p)\varphi(r - C(p)x^e), \\ 0 = A_{21}(p)x^e + A_{22}(p)z^e + q_2(p)\varphi(r - C(p)x^e). \end{cases}$$

Следуя работе [6], легко видеть, что $x^e(p,r) = x_s^e(p,r)$, где $x_s^e(p,r)$ есть состояние равновесия "медленной" системы

$$\dot{x_s} = A_0(p)x_s + q_0(p)\varphi(r - C(p)x_s). \tag{2}$$

Здесь $A_0(p) = A_{11}(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)$, $q_0(p) = q_1(p) - A_{12}(p)A_{22}^{-1}(p)q_2(p)$, а $z^e(p,r) = \Phi(x^e(p,r))$, где $\Phi(x) = -A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p)x+q_2(p)\varphi(r-C(p)x))$. Причем очевидно, что $z^e(p,r)$ существует, если существует $x^e(p,r)$. Таким образом, вопрос о существовании состояния равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы эквивалентен вопросу о существовании состояния равновесия "медленной" системы (2) и область в пространстве параметров, для значений которых существует состояние равновесия "медленной" системы (2), совпадает с областью в пространстве параметров, для значений которых существует состояние равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы (1).

Анализ параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы. Рассмотрим "медленную" систему (2). Используя предположение 1 и предположения, сделанные относительно элементов системы (1), получим, что условия предположения 1 из [7] выполняются для системы (2). Значит, мы можем использовать теорему 2 из [7].

Пусть Q_s — произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n$; P_s^* — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$\begin{aligned} &(K_0(p^*))^T P_s^* + P_s^*(K_0(p^*)) = -Q_s, \\ &M_0(p,p^*) = (K_0(p) - K_0(p^*))^T P_s^* + P_s^*(K_0(p) - K_0(p^*)). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда, согласно теореме 2, выполнение условия

$$\left\| \frac{\partial \varphi u}{\partial u}\bigg|_u - I \right\| \leqslant \frac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))}{4\|P_s^*\|\|K_0(p^*)\|\|(K_0(p^*))^{-1}\| \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\|q_0(p)\|)\|C(p)\|} \equiv \alpha \tag{4}$$

для всех $u \in \mathbb{R}^s$, где область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l | \|p - p^*\| \leqslant b1\}$ определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{\min}(Q_s) - \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*)))}{4\|P_s^*\|\|K_0(p^*)\|\|(K_0(p^*))^{-1}\|} + \max\limits_{p\in\Omega_p 1}\|K_0(p) - K_0(p^*)\| \leqslant \dfrac{1}{2\|(K_0(p^*))^{-1}\|}, \\ \max\limits_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_s), \end{cases} \tag{5}$$

обеспечивает абсолютную параметрическую устойчивость системы (2) относительно области $\Omega_p 1 \times \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^s | \|r\| \leqslant c\}$, где c — произвольное как угодно большое наперед заданное число. Отметим, что, согласно п. 2, для всех $(p,r) \in \Omega_p 1 \times \Omega_r$ будет существовать единственное состояние равновесия $(x^e(p,r), z^e(p,r))$ системы (1), поскольку при этих значениях параметров оно существует для "медленной" системы (2). Функция Ляпунова, позволяющая установить устойчивость состояния равновесия "медленной" системы для всех значений параметров $(p,r) \in \Omega_p 1 \times \Omega_r$, имеет вид

$$V_s(x) = (x - x^e(p,r))^T P_s^*(x - x^e(p,r)).$$

Рассмотрим "быструю" систему

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = A_{21}(p)\widetilde{x} + A_{22}(p)\widetilde{z} + q_2(p)\varphi(r - C(p)\widetilde{x}), \tag{6}$$

где $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ считаем фиксированным постоянным вектором; $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$ — быстрое время $\widetilde{z}(\tau) = z(\varepsilon t + t_0)$, $\widetilde{x}(\tau) = x(\varepsilon t + t_0)$. Для исследования устойчивости состояния равновесия этой системы $\widetilde{z}^e(p,r) = -A_{22}^{-1}(A_{21}(p)\widetilde{x} + q_2(p)\varphi(r - C(p)\widetilde{x}))$ воспользуемся функцией Ляпунова следующего вида:

$$V_f(\widetilde{x},\widetilde{z}) = (\widetilde{z} - \widetilde{z}^e)^T P_f^*(\widetilde{z} - \widetilde{z}^e).$$

Здесь P_f^* — симметрическая положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$A_{22}^T(p^*)P_f^* + P_f^* A_{22}(p^*) = -Q_f;$$

Q_f — произвольная симметрическая положительно определенная матрица размерности $m \times$ $\times\, m$. Найдем производную функции $V_f(\widetilde{x}, \widetilde{z})$ по τ в силу системы (6)

$$\frac{dV_f(\widetilde{x},\widetilde{z})}{d\tau}\bigg|_{(6)} = (\widetilde{z}-\widetilde{z}^e)^T (A_{22}^T(p)P_f^* + P_f^* A_{22}(p))(\widetilde{z}-\widetilde{z}^e) =$$

$$= (\widetilde{z}-\widetilde{z}^e)^T (A_{22}^T(p^*)P_f^* + P_f^* A_{22}(p^*))(\widetilde{z}-\widetilde{z}^e) +$$

$$+ (\widetilde{z}-\widetilde{z}^e)^T ((A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_f^* + P_f^*((A_{22}(p) - A_{22}(p^*)))(\widetilde{z}-\widetilde{z}^e) =$$

$$= -(\widetilde{z}-\widetilde{z}^e)^T Q_f (\widetilde{z}-\widetilde{z}^e) + (\widetilde{z}-\widetilde{z}^e) N(p,p^*)(\widetilde{z}-\widetilde{z}^e), \qquad (7)$$

где

$$N(p,p^*) = (A_{22}(p) - A_{22}(p^*))^T P_f^* + P_f^*((A_{22}(p) - A_{22}(p^*)).$$

Из (7) следует, что

$$\frac{dV_f(\widetilde{x},\widetilde{z})}{d\tau}\bigg|_{(6)} \leqslant \Big(-\lambda_{\min}(Q_f) + \max_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(N(p,p^*)))\Big)\|\widetilde{z}-\widetilde{z}^e\|.$$

Значит, для всех $p \in \Omega_p 2$, $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leqslant b2\}$, где $\Omega_p 2$ определяется из условия

$$\max_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))) < \lambda_{\min}(Q_f), \qquad (8)$$

функция $V_f(\widetilde{x}, \widetilde{z})$ является функцией Ляпунова, позволяющей установить устойчивость состояния равновесия $\widetilde{z}^e(p, r)$ системы (6).

Полученные результаты по устойчивости "медленной" и "быстрой" подсистем дают возможность сформулировать теорему, которая определяет достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(u)$, входящая в систему* (1), *удовлетворяет условию* (4) *для всех $u \in \mathbb{R}^s$, где область $\Omega_p 1 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leqslant b1\}$ определяется из системы неравенств* (5) *и область $\Omega_p 2 = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \|p - p^*\| \leqslant b2\}$ определяется из условия* (8). *Тогда система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно области $(\Omega_p 1 \bigcap \Omega_p 2) \times$ $\times\, \Omega_r$, $\Omega_r = \{r \in \mathbb{R}^s \mid \|r\| \leqslant c\}$, где c — произвольное как угодно большое наперед заданное число, для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = \dfrac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\xi_2}$, где*

$$\beta_1 = -\lambda_{\min}(Q_s) + \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(M_0(p,p^*))) + 2\|P_s^*\|\alpha \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\|q_0(p)\|\|C(p)\|),$$

$$\gamma_1 = 2\|P_s^*\| \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} \|A_{12}(p)\|,$$

$$\beta_2 = -\lambda_{\min}(Q_f) + \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\lambda_{\max}(N(p,p^*))),$$

$$\xi_2 = \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}[\lambda_{\max}(A_{12}^T(p)(A_{21}^T(p) - C^T(p)q_2^T(p))(A_{22}^{-1}(p))^T P_f^* +$$

$$+ P_f^* A_{22}^{-1}(p)(A_{21}(p) - q_2(p)C(p))A_{12}(p))] +$$

$$+ 2\|P_f^*\|\alpha \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)}(\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_{12}(p)\|),$$

$$\gamma_2 = 2\|P_f^*\| \max_{p\in(\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)} (\|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)A_0(p)\|\alpha +$$

$$+ \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)A_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)\|\|C(p)\|\alpha +$$

$$+ \|A_{22}^{-1}(p)A_{21}(p)q_0(p)C(p)\| + \|C(p)\|\|C(p)q_0(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\alpha^2 +$$

$$+ \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)\|\|C(p)q_0(p)C(p)\|\alpha + \|C(p)\|\|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\| +$$

$$+ \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)\| + \|A_{22}^{-1}(p)q_2(p)C(p)q_0(p)C(p)\|).$$

Замечание 2. Если область $\Omega_p 1 \bigcap \Omega_p 2$ шире области Ω_p из замечания 1, то система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно области Ω_p.

1. *Ikeda M., Ohta Y., Šiljak D. D.* Parametric stability // The Ohio State University Joint Conference: (Proceedings of the Univesitá di Genova). – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1991. – P. 1–20.
2. *Мартынюк А. А., Хорошун А. С.* К теории параметрической устойчивости // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 59–65.
3. *Мартынюк А. А., Хорошун А. С.* О параметрической устойчивости крупномасштабных систем // Прикл. механика. – 2008. – № 5. – С. 104–115.
4. *Хорошун А. С.* Параметрическая квадратическая стабилизация нелинейных систем с неопределенностью // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 36–41.
5. *Хорошун А. С.* Глобальная параметрическая квадратическая стабилизация нелинейных механических систем с неопределенностью // Прикл. механика. – 2008. – № 6. – С. 126–133.
6. *Silva G., Dzul F. A.* Parametric absolute stability of a class of singularly perturbed systems // Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control. – Tampa, Florida, 1998. – P. 1422–1427.
7. *Хорошун А. С.* Условия абсолютной параметрической устойчивости систем Лурье // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 64–71.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 23.12.2009

A. S. Khoroshun

On the parametric stability of nonlinear imprecise singularly perturbed systems

A class of singularly perturbed systems which contain some parameters is investigated. On the base of the comparison principle with a vector Lyapunov function, the sufficient conditions for the absolute parametric stability of such systems are obtained.