УДК 517.9

А. А. Джалилов, А. Ю. Теплинский

Некоторые примеры диффеоморфизмов окружности с изломом

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

Побудовано нескінченно гладкі та аналітичні приклади пар дифеоморфізмів кола зі зламом з числами обертання напівобмеженого типу, які є C^1-гладко спряженими, але не є $C^{1+\gamma}$-гладко спряженими для жодного $\gamma > 0$. Тим самим доведено точність оцінки на гладкість спряження для таких відображень, отриманої раніше Теплінсъким та Ханіним. Побудовані гладкі приклади можуть мати діофантові числа обертання.

1. Постановка задачи. Классическая теорема Данжуа [1] утверждает, что два сохраняющих ориентацию диффеоморфизма окружности класса $C^{1+\mathrm{bv}}$ (т. е. с ограниченной вариацией производной) и одним и тем же иррациональным числом вращения гомеоморфно сопряжены между собой, т. е. переводятся один в другой посредством непрерывной замены координат. Изучение степени гладкости такого сопряжения началось в рамках теории КАМ, и первый результат был получен Арнольдом [2]. Теорема Арнольда утверждала, что аналитический диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения аналитически сопряжен с жестким (линейным) поворотом этой окружности на соответствующий угол при условии, что два указанных отображения изначально близки между собой и число вращения является диофантовым, т. е. принадлежит классу $D_\delta = \{\rho \in \mathbb{R} \mid (\exists\, C > 0)(\forall\, p/q \in \mathbb{Q})\colon |\rho - p/q| > C/q^{2+\delta}\}$ для некоторого $\delta > 0$ (здесь и далее, рассматривая рациональное число в виде p/q, считаем, что $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 1$ — взаимно простые целые числа). При этом в [2] были построены примеры аналитических диффеоморфизмов окружности с недиофантовыми числами вращения, как угодно близких к соответствующим линейным поворотам, чье сопряжение с ними не является даже абсолютно непрерывным. Далее Эрман [3] избавился от условия близости диффеоморфизма к линейному повороту окружности, а Йоккос [4] исследовал связь между показателем гладкости диффеоморфизма окружности, диофантовым показателем δ и показателем гладкости результирующего сопряжения. Для диффеоморфизмов низкой гладкости наиболее точный результат получен в [5] (полное доказательство см. в [6]): сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности класса $C^{2+\alpha}$ с числом вращения из D_δ, $0 \leqslant \delta < \alpha \leqslant 1$, $\alpha - \delta < 1$, сопряжен с линейным поворотом посредством $C^{1+\alpha-\delta}$-гладкой замены координат.

Поскольку теорема Данжуа верна не только для "чистых" диффеоморфизмов окружности, но и в случае наличия у них некоторых особенностей, естественным образом возник вопрос о степени гладкости сопряжения между собой так называемых диффеоморфизмов с особенностями [7], в частности с критической точкой (в которой производная вырождается в нуль) и с точкой излома (в которой производная слева не равна производной справа). Очевидно, что в этих случаях в число инвариантов относительно гладкого сопряжения кроме числа вращения входят также определенные локальные характеристики отображения в особой точке. Оказалось однако, что присутствие особенности избавляет от необходимости наложения диофантовых ограничений на число вращения для доказательства C^1-гладкости сопряжения в случае совпадения упомянутых локальных характеристик (феномен так называемой усиленной жесткости [8]). С другой стороны, большая степень гладкости сопряжения, т. е. $C^{1+\gamma}$ с некоторым $\gamma > 0$, для диффеоморфизмов с особенностями в общем случае получена быть не может, даже если эти диффеоморфизмы бесконечно гладкие или аналитические. Соответствующие примеры для случая критической особенности были построены в [9, 10], а для случая излома их построение является предметом настоящей работы.

Для заданных натурального j и отображения F обозначаем $F^j = F \circ F \circ \dots \circ F$ (j раз), $F^{-j} = (F^{-1})^j$, $F^0 = \mathbb{I}\mathrm{d}$ (тождественное отображение). Пусть π — фактор-отображение действительной прямой $\mathbb{R}$ на единичную окружность $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \pi\mathbb{R}$. Сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы T окружности $\mathbb{S}$ посредством соотношения $\pi \circ L = T \circ \pi$ взаимно однозначно сопоставляются с сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами прямой $\mathbb{R}$ такими, что $L(x+1) \equiv L(x) + 1$, и не зависящее от $x \in \mathbb{R}$ значение предела $\rho(L) = \lim\limits_{j\to\infty} j^{-1} L^j(x)$ принадлежит $[0,1)$. Это значение $\rho = \rho(T) = \rho(L)$ называется числом вращения T, а L — поднятием T на прямую. (Так определенное поднятие всегда либо имеет неподвижную точку, либо лежит строго между отображениями $\mathbb{I}\mathrm{d}$ и $\mathbb{I}\mathrm{d} + 1$.) Для числа вращения будем рассматривать его разложение в цепную дробь $\rho = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots] = 1/(k_1 + 1/(k_2 + {} + 1/(\dots/(k_n + \cdots))))$. Рассмотрим два класса иррациональных чисел полуограниченного типа: $M_{\mathrm{o}} = \{\rho\colon \exists\, C > 0\ \forall\, m \geqslant 1\ k_{2m-1} \leqslant C\}$, $M_{\mathrm{e}} = \{\rho\colon \exists\, C > 0\ \forall\, m \geqslant 1\ k_{2m} \leqslant C\}$.

Гомеоморфизм T называется диффеоморфизмом окружности гладкости C^r, $r \in {} \in [2,\infty] \bigcup \{\mathcal{E}\}$, с изломом [11] в точке $\xi_0 \in \mathbb{S}$, если выполняются условия, которые мы сформулируем в терминах ограничения $\overline{L}$ поднятия L на отрезок $[x_0, x_0+1]$, где $\mu x_0 = \xi_0$: $\overline{L} \in C^r([x_0, x_0+1])$ (в случае $r = \mathcal{E}$ имеется в виду, что $\overline{L}$ аналитически продолжается с отрезка $[x_0, x_0+1]$ до целой голоморфной функции); $\overline{L}' > 0$; $\overline{L}'(x_0) \neq \overline{L}'(x_0+1)$. Величиной излома мы называем число $c = c(T) = \sqrt{\overline{L}'(x_0+1)/\overline{L}'(x_0)} = \sqrt{T'(\xi_0-)/T'(\xi_0+)} \in (0,1) \bigcup (1, +\infty)$, инвариантное относительно гладких сопряжений. В [7] был объявлен (с технической ошибкой: условия $\rho \in M_{\mathrm{e}}$ и $\rho \in M_{\mathrm{o}}$ там сопоставлены условиям $c > 1$ и $c < 1$ наоборот) следующий результат.

Теорема. *Пусть T и $\widetilde{T}$ — диффеоморфизмы окружности гладкости $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, с изломом одной и той же величины $c > 1$ ($c < 1$) с одним и тем же числом вращения $\rho \in M_{\mathrm{e}}$ ($\rho \in M_{\mathrm{o}}$). Тогда их сопряжение $\varphi = \varphi(T, \widetilde{T})$, переводящее точку излома T в точку излома $\widetilde{T}$, является диффеоморфизмом окружности гладкости C^1.*

Адаптируя на случай излома построения [9, 10], мы доказываем следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любых заданных $c > 1$ ($c < 1$) и $\rho \in M_{\mathrm{e}}$ ($\rho \in M_{\mathrm{o}}$), чье разложение в цепную дробь содержит подпоследовательность k_{n_j}, $j \geqslant 1$, с нечетными (четными) индексами n_j такую, что $\lim\limits_{j\to\infty} n_j^{-1} \ln k_{n_j} = +\infty$, и при этом $k_{n_j+1} \geqslant 2$ для всех $j \geqslant 1$, существует пара диффеоморфизмов окружности гладкости C^∞ с изломом величины c и числом вращения ρ, не являющаяся $C^{1+\gamma}$-гладко сопряженной ни для какого $\gamma > 0$.*

Теорема 2. *Существует пара диффеоморфизмов окружности гладкости $C^{\mathcal{E}}$ с изломом любого заданного размера $c > 1$ ($c < 1$) и числом вращения $\rho \in M_{\mathrm{e}}$ ($\rho \in M_{\mathrm{o}}$), чье разложение в цепную дробь имеет любое заданное начало k_n, $1 \leqslant n \leqslant 2m_0$, и любые заданные коэффициенты k_n на позициях с четными (нечетными) индексами $n \geqslant 1$, не являющаяся $C^{1+\gamma}$-гладко сопряженной ни для какого $\gamma > 0$.*

Гладкие примеры строятся более конструктивным путем, выражением чего и является явная оценка на рост коэффициентов цепной дроби в теореме 1 (отметим, что существуют диофантовы числа ρ, удовлетворяющие ее условиям, — например, с $k_{n_j} = 2^{2^{n_j}}$). Мы ограничимся случаем $c > 1$; для $c < 1$ достаточно обратить построенные для $c > 1$ отображения.

2. Построение гладких примеров. Рассмотрим ренормализации диффеоморфизма окружности T гладкости C^∞ с изломом размера $c > 1$ и числом вращения ρ, удовлетворяющим условиям теоремы 1. Положим $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$. Обозначим $\xi_j = T^j\xi_0$, $j \geqslant 1$. Определим фундаментальный отрезок $\Delta_0^{(n)}$ как дугу $[\xi_0, \xi_{q_n}]$ для четного n и $[\xi_{q_n}, \xi_0]$ для нечетного. Положим $\overline{\Delta}_0^{(n-1)} = \Delta_0^{(n-1)} \bigcup \Delta_0^{(n)}$ и введем для $\xi \in \overline{\Delta}_0^{(n-1)}$ перенормированную переменную $z = (\xi - \xi_0)/(\xi_0 - \xi_{q_{n-1}})$. В новых координатах точкам $\xi_{q_{n-1}}$ и ξ_0 соответствуют -1 и 0. Перенормированную координату точки ξ_{q_n} обозначим a_n. Обозначим через $f_n(z)$, $z \in [-1, 0]$ и $g_n(z)$, $z \in [0, a_n]$ отображения, соответствующие функциям T^{q_n} и $T^{q_{n-1}}$ в новых координатах. Таким образом, отображению Пуанкаре для T на $\overline{\Delta}_0^{(n-1)}$ соответствует пара функций (f_n, g_n), которую называют n-й ренормализацией T. В работе Вул и Ханина [12] доказано, что ренормализации f_n и g_n с некоторого момента становятся строго выпуклыми: $f''_{2m} \geqslant \mathrm{const} > 0$ и $g''_{2m} \geqslant \mathrm{const} > 0$ при $m \geqslant m_0$.

Пусть n_j, $j \geqslant 1$, — числа, определяемые условием теоремы 1. Отрезок $\Delta_0^{n_j-2}$ при помощи точек $\xi_{q_{n_j-2}+sq_{n_j-1}}$, $1 \leqslant s \leqslant k_{n_j}$, разбивается на k_{n_j} отрезков. Обозначим через z_s перенормированную координату точки $\xi_{q_{n_j-2}+sq_{n_j-1}}$. Заметим, что $-1 = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{k_{n_j}} < 0$ и $z_{s+1} = f_{n_j-1}(z_s)$, $0 \leqslant s < k_{n_i}$. Положим $I_s = [z_s, z_{s+1}]$. Можно показать, что для длин отрезков I_s справедливы следующие оценки:

$$\frac{K^{-1}}{\min\{s, k_{n_j} - s + 1\}^2} \leqslant |I_s| \leqslant \frac{K}{\min\{s, k_{n_j} - s + 1\}^2}, \qquad 0 \leqslant s < k_{n_j}, \tag{1}$$

где константа $K > 1$ зависит только от T. Отметим, что, когда f_n обладает отрицательной производной Шварца, неравенство (1) является содержанием леммы Йоккоса [9].

Обозначим через $\eta_0 = \eta_0(j)$ такую точку интервала $(\xi_{q_{n_j-2}}, \xi_{q_{n_j-2}+q_{n_j-1}})$, что $T^{k_{n_j}q_{n_j-1}}\eta_0 = \xi_{q_{n_j+1}}$, т. е. $\eta_0 = \xi_{q_{n_j+1}-q_{n_j}+q_{n_j-2}}$. Поскольку $k_{n_j+1} \geqslant 2$, $\xi_{q_{n_j+1}}$ не может быть концевой точкой отрезка $[\xi_{q_{n_j}}, \xi_{q_{n_j}+q_{n_j-1}}]$. Отрезки $\Lambda_1 = [\xi_{q_{n_j-2}}, \eta_0]$ и $\Pi_1 = [\eta_0, \xi_{q_{n_j-2}+q_{n_j-1}}]$ соизмеримы, т. е. $K_1^{-1}|\Pi_1| \leqslant |\Lambda_1| \leqslant K_1|\Pi_1|$, где константа $K_1 > 1$ зависит только от T.

Рассмотрим другой диффеоморфизм $\widetilde{T}$ с изломом в $\widetilde{\xi}_0$ с теми же c и ρ. Ему соответствуют точка $\widetilde{\eta}_0$ и отрезки $\widetilde{\Lambda}_1$ и $\widetilde{\Pi}_1$. Обозначим через N_j целую часть числа $k_{n_j}/2$. Число $\delta_{n_j}(T, \widetilde{T}) = ||T^{N_jq_{n_j-1}}\Lambda_1|/|T^{N_jq_{n_j-1}}\Pi_1| - |\widetilde{T}^{N_jq_{n_j-1}}\widetilde{\Lambda_1}|/|\widetilde{T}^{N_jq_{n_j-1}}\widetilde{\Pi_1}||$ называется n_j-м расхождением между T и $\widetilde{T}$. Ключевую роль при доказательстве теоремы 1 играет следующая лемма

Лемма 1. *Пусть диффеоморфизм окружности T гладкости C^∞ с изломом размера $c > 1$ имеет число вращения $\rho \in M_\mathrm{e}$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, и функция $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{j\to\infty} \sigma(n_j) = \infty, \qquad \lim_{j\to\infty} (n_i\sigma(n_j))^{-1} \ln k_{n_j} = \infty.$$

Тогда для каждого $j \geqslant 1$ существует диффеоморфизм окружности $\widetilde{T}_j = F(n_j, T)$ гладкости C^∞ с теми же параметрами c, ρ, $\widetilde{\xi}_0 = \xi_0$, обладающий следующими свойствами:

1) $\widetilde{\xi}_i = \xi_i$ для всех $0 \leqslant i \leqslant q_{n_j}$;

2) $\widetilde{T}_j = \Phi_j \circ T$, где Φ_j — диффеоморфизм окружности класса C^∞, и для всех $i \geqslant 0$ имеем $\|\Phi_j^{\pm 1}(\xi) - \xi\|_{C^i(\mathbb{S})} \leqslant B_i|\overline{\Delta}_0^{n_j-2}|^{\sigma(n_j)-i+1}$, где константа $B_i > 0$ зависит только от k;

3) $\delta_{n_j}(T;\widetilde{T}_j) \geqslant \mathrm{const}|\overline{\Delta}_0^{n_j-2}|^{2\sigma(n_j)}$*;*

4) $\widetilde{\xi}_{q_n} = \xi_{q_n}$ *для всех* n*, и* $\widetilde{f}_n = f_n$ *для всех* $n > n_j$*.*

Лемма 1 доказывается так же, как аналогичное утверждение в [9]. Фактически мы определенным образом возмущаем отображение T на отрезках $[\xi_{q_{n_j-2}}, \xi_{q_{n_j-2}+q_{n_j-1}}]$ и $[\xi_{q_{n_j}}, \xi_{q_{n_j}+q_{n_j-1}}]$, причем так, что эти два возмущения аннигиллируют при рассмотрении итерации $T^{q_{n_j}}$ на $\Delta_0^{(n_j-1)}$, из которой получается ренормализация f_{n_j+1} (и далее все последующие).

Теперь докажем теорему 1. Возьмем произвольное отображение T, удовлетворяющее условиям теоремы (его можно выбрать в виде $T_0 + t$, $t \in \mathbb{R}$, с произвольным диффеоморфизмом T_0 гладкости C^∞ с заданным изломом $c > 1$). Пусть $\sigma(n_j)$, $j \geqslant 1$, удовлетворяет условиям леммы 1. Положим $\widetilde{T}_1 = T$ и $\widetilde{T}_{j+1} = F(n_j, \widetilde{T}_j)$ для $j \geqslant 1$ в соответствии с леммой 1. Из утверждения леммы 1 следует, что $T_{j+1} = \Phi_{j+1} \circ T_j$, где Φ_{j+1} — диффеоморфизм окружности класса C^∞, и $\|\Phi_{j+1}^{\pm 1}(x) - x\|_{C^i(S)} \leqslant B_i \theta^{n_j(\sigma(n_j)-i+1)}$, $k \geqslant 1$, где константа $\theta \in (0,1)$ зависит только от T. Из последнего неравенства следует существование (в C^∞-топологии) предела $\lim\limits_{j\to\infty} \Phi_j \circ \Phi_{j-1} \circ \dots \circ \Phi_1 = \Phi$. Ясно, что Φ — диффеоморфизм окружности класса C^∞, и $\widetilde{T} = \lim\limits_{j\to\infty} \widetilde{T}_j = \Phi \circ T$ — диффеоморфизм гладкости C^∞ с изломом в ξ_0 размера $c > 1$ с числом вращения ρ. Покажем, что пара T, $\widetilde{T}$ является искомым примером.

Предположим, что сопряжение φ между T и $\widetilde{T}$ принадлежит классу $C^{1+\beta}$ при некотором $\beta > 0$. Тогда из определения расхождения нетрудно вывести оценку $\delta_{n_j}(T;\widetilde{T}) \leqslant \mathrm{const}|T^{N_j}[\xi_{q_{n_j-2}}, \xi_{q_{n_j-2}+q_{n_j-1}}]|^\beta$. Используя (1), получаем: $|T^{N_j}[\xi_{q_{n_j-2}}, \xi_{q_{n_j-2}+q_{n_j-1}}]| \sim k_{n_j}^{-2}|\overline{\Delta}_0^{n_j-2}|$, где $a \sim b$ обозначает ограниченность отношений a/b и b/a. В силу утверждения *3* леммы 1 из этого следует, что $k_{n_j}^{2\beta}|\overline{\Delta}_0^{n_j-2}|^{2\sigma(n_i)-\beta} \leqslant \mathrm{const}$. Ввиду особых свойств диффеоморфизмов окружности с изломом с числами вращения полуограниченного типа [7] существует такое $\lambda = \lambda(T) \in (0,1)$, что $|\Delta_0^n| \geqslant \mathrm{const}\lambda^n$, поэтому последняя оценка влечет за собою неравенство $\beta(n_j\sigma(n_j))^{-1}\ln k_{n_j} \leqslant (n_j\sigma(n_j))^{-1}\mathrm{const} + \ln\lambda^{-1}$. Но по построению левая часть последнего неравенства стремится к ∞, тогда как правая ограничена. Противоречие.

3. Построение аналитических примеров. Здесь мы используем идею Авилы [10], связанную с параболическими ренормализациями. Рассмотрим класс поднятий $\mathcal{L}_c^r$, $c > 1$, $r \geqslant 2$, диффеоморфизмов окружности класса C^r с изломом величины $c > 1$ в точке $\xi_0 = 0$ и строго выпуклых вниз на $[0,1]$, т. е. удовлетворяющих дополнительным условиям $\overline{L}'' > 0$, $\overline{L}'(1) = c^2\overline{L}'(0)$. Обозначим $\mathcal{L}_{c,p/q}^r$ класс поднятий $L \in \mathcal{L}_c^r$ таких, что $\rho(L) = p/q$ и $f = L^q - p \geqslant \mathbb{I}\mathrm{d}$. Нетрудно показать, что в случае $L \in \mathcal{L}_{c,p/q}^r$ график $f = L^q - p$ выпукло касается прямой $\mathbb{I}\mathrm{d}$ в точках единственной q-периодической траектории соответствующего диффеоморфизма окружности с изломом T. Пусть $L_s \in \mathcal{L}_c^r$, $s \in (A,B)$, — семейство поднятий, строго непрерывно возрастающее относительно параметра s. Зависимость числа вращения ρ от s имеет вид “чертовой лестницы”: оно непрерывно, монотонно неубывает и принимает каждое данное иррациональное значение из $(r(L_A), r(L_B))$ в единственной точке, а рациональное $p/q \in (r(L_A), r(L_B))$ — на некотором невырожденном отрезке $[s^*(p/q), s^{**}(p/q)]$, причем $L_{s^{**}(p/q)} \in \mathcal{L}_{c,p/q}^r$. Более того, из упорядочения цепных дробей $[k_1, k_2, \dots, k_{2m}, k] \geqslant [k_1, k_2, \dots, k_{2m}, k, \dots] \geqslant [k_1, k_2, \dots, k_{2m}, k, 1] = [k_1, k_2, \dots, k_{2m}, k+1]$ следует, что для $p/q = [k_1, k_2, \dots, k_{2m}]$ последовательность $s_k = s^{**}([k_1, k_2, \dots, k_{2m}, k]) \in (A,B)$, $k \geqslant k_0$, строго убывает к $s^{**}(p/q)$, причем число вращения $\rho(L_s)$ может быть представлено в виде $[k_1, k_2, \dots, k_{2m}, k, \dots]$ тогда и только тогда, когда $s \in [s_{k+1}, s_k]$.

Аффинная нормализация строго возрастающей на $[A, B]$ функции F задается формулой $N_{F,[A,B]}(t) = (F(B) - F(A))^{-1}(F(A + t(B - A)) - F(A))$. Параболическую ренормализацию данного поднятия $L \in \mathcal{L}^r_{c,p/q}$, $r \geqslant 3$, определим как $R_L = \Phi_{L,+} \circ \Phi^{-1}_{L,-}$, где $\Phi_{L,+}$, $\Phi_{L,-}$ — пределы в $C^1([0, 1])$ последовательностей $\Phi_{L,+,n} = N_{f^n,[0,f(0)]}$, $\Phi_{L,-,n} = N_{f^{-n},[0,f(0)]}$, $n \geqslant 0$. Можно показать, что если диффеоморфизмы окружности с изломом, соответствующие поднятиям L, $\widetilde{L} \in \mathcal{L}^r_{c,p/q}$, сопряжены C^1-гладко, то параболические ренормализации R_L и $R_{\widetilde{L}}$ совпадают.

С другой стороны, для данного $L \in \mathcal{L}^r_{c,p/q}$ можно построить 1-периодический тригонометрический полином V_L такой, что $V_L(L^j(0)) = 0$, $0 \leqslant j < q$; $V^{(k)}_L(x) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, когда πx лежит на q-периодической траектории T; ограничение V_L на $[f(0), 1]$ мало в C^3-норме; однако $V_L(f(0)/2) = 1$, в силу чего $L + \varepsilon V_L \in \mathcal{L}^r_{c,p/q}$, но $R_L \neq R_{L+\varepsilon V_L}$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Пространство целых голоморфных функций с метрикой $\operatorname{dist}(f, g) = D(f - g)$, где $D(f) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} 2^{-m} \dfrac{\max_{|z|\leqslant m} |f(z)|}{\max_{|z|\leqslant m} |f(z)| + 1}$, полно, и сходимость последовательности функций влечет за собой равномерную сходимость их производных всех порядков на компактных подмножествах $\mathbb{C}$. Та же запись $\operatorname{dist}(L, \widetilde{L})$ для поднятий L, $\widetilde{L} \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_c$ будет означать расстояние между целыми голоморфными функциями, до которых продолжаются ограничения L, $\widetilde{L}$ на $[0, 1]$.

Выберем произвольно $L_0 \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,k_2,\ldots,k_{2m_0}]}$ и его возмущение $\widetilde{L}_0 = L_0 + \varepsilon_0 V_{L_0} \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,k_2,\ldots,k_{2m_0}]}$ такое, что $R_{L_0} \neq R_{\widetilde{L}_0}$. Класс $H^{1+}(\mathbb{S})$ всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности, переводящих нуль в нуль и $C^{1+\gamma}$-гладких хотя бы для какого-нибудь $\gamma > 0$, представим в виде объединения компактных в C^1-топологии множеств K_m, $m \geqslant m_0$. Для уже построенной пары L_m, $\widetilde{L}_m \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,k_2,1,\ldots,k_{2m}]}$, $m \geqslant m_0$, $R_{L_m} \neq R_{\widetilde{L}_m}$, найдется такое $\delta^*_m > 0$, что никакие два диффеоморфизма с изломом, чьи поднятия лежат в замкнутых δ^*_m-окрестностях (по метрике dist) поднятий L_m, $\widetilde{L}_m$ соответственно, не могут быть сопряжены посредством элемента множества K_m в силу компактности. Положим $\delta_{m_0} = \delta^*_{m_0}$, $\delta_m = \min\{2^{-m}, \delta^*_m, \delta_{m-1} - \operatorname{dist}(L_m, L_{m-1}), \delta_{m-1} - \operatorname{dist}(\widetilde{L}_m, \widetilde{L}_{m-1})\}$ при $m > m_0$. Найдутся достаточно малые числа $u_m > 0$ и $\widetilde{u}_m > 0$ такие, что $\rho(L_m + u_m) = \rho(\widetilde{L}_m + \widetilde{u}_m) = [k_1, k_2, \ldots, k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2}]$ с некоторым достаточно большим k_{2m+1} и заданным k_{2m+2}, и при этом $D(u_m) < \delta_m$, $D(\widetilde{u}_m) < \delta_m/2$. Если $R_{L_m+u_m} \neq R_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m}$, то положим $L_{m+1} = L_m + u_m$, $\widetilde{L}_{m+1} = \widetilde{L}_m + \widetilde{u}_m$, в противном случае возьмем $\widetilde{L}_{m+1} = \widetilde{L}_m + \widetilde{u}_m + \varepsilon_m V_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m}$ такое, что $R_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m} \neq R_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m+\varepsilon_m V_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m}}$, причем ε_m настолько мало, что $D(\varepsilon_m V_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m}) < \delta_m/2$ и $\varepsilon_m |V''_{\widetilde{L}_m+\widetilde{u}_m}| < 2^{-m} \inf\limits_{x\in(0,1)} \widetilde{L}''_0(x)$. В результате получаем L_{m+1}, $\widetilde{L}_{m+1} \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_{c,[k_1,k_2,\ldots,k_{2m+2}]}$, $R_{L_{m+1}} \neq R_{\widetilde{L}_{m+1}}$, $\operatorname{dist}(L_{m+1}, L_m) < \delta_m$, $\operatorname{dist}(\widetilde{L}_{m+1}, \widetilde{L}_m) < \delta_m$.

Построенные последовательности L_m, $\widetilde{L}_m$ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{dist}(L_{m+j}, L_m) < \delta_m$, $\operatorname{dist}(\widetilde{L}_{m+j}, \widetilde{L}_m) < \delta_m$ для всех $m \geqslant m_0$, $j \geqslant 0$, и $\delta_m \to 0$, $m \to +\infty$. Вследствие полноты они сходятся в метрике dist, их пределы L, $\widetilde{L} \in \mathcal{L}^{\mathcal{E}}_c$ порождают искомые примеры: соответствующие диффеоморфизмы окружности с изломом ни для какого $m \geqslant m_0$ не могут быть сопряжены посредством элемента множества K_m, а $\bigcup\limits_{m=m_0}^{+\infty} K_m = H^{1+}(\mathbb{S})$.

1. *Denjoy A.* Sur les courbes definies par les equation differentielles a la surface du tore // J. Math. Pures et Appl. – 1932. – **11**. – P. 333–375.

2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.
3. *Herman M.-R.* Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. – 1979. – **49**. – P. 5–233.
4. *Yoccoz J.-C.* Conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle dont le nombre de rotation verifie une condition diophantienne // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser. 4. – 1984. – **17**, No 3. – P. 333–359.
5. *Теплинский А. Ю., Ханин К. М.* Точная оценка гладкости сопряжения, линеаризующего нелинейный диффеоморфизм окружности // Докл. АН. – 2009. – **428**, № 3. – С. 317–321.
6. *Khanin K., Teplinsky A.* Herman's theory revisited // Invent. Math. – 2009. – **178**, No 2. – P. 333–344.
7. *Теплинский А. Ю., Ханин К. М.* Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями // Успехи мат. наук. – 2004. – **59**, № 2. – С. 137–160.
8. *Khanin K., Teplinsky A.* Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities // Invent. Math. – 2007. – **169**, No 1. – P. 193–218.
9. *de Faria E., de Melo W.* Rigidity of critical circle mappings. I // J. Eur. Math. Soc. – 1999. – **1**, No 4. – P. 339–392.
10. *Avila A.* On rigidity of critical circle maps. – Paris, 2005. – 5 p. – Prepr. / Univ. Paris 6. (available from http://www.impa.br/∼avila/circle.pdf).
11. *Вул Е. Б., Ханин К. М.* Гомеоморфизмы окружности с особенностью типа излома // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 3. – С. 189–190.
12. *Khanin K. M., Vul E. B.* Circle homeomorphisms with weak discontinuities // Proc. Int. Conf. "Dynamical systems and statistical mechanics" (Moscow, 1991). – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. – P. 57–98.

Самаркандский государственный университет, Узбекистан
Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 09.02.2010

A. A. Dzhalilov, A. Yu. Teplinsky

Certain examples of circle diffeomorphisms with a break

We construct infinitely smooth and real-analytic examples of pairs of circle diffeomorphisms with a break with rotation numbers of the half-bounded type, which are C^1-smoothly conjugate but not $C^{1+\gamma}$-smoothly conjugate for any $\gamma > 0$. This proves that the estimate on a smoothness of the conjugacy for such maps, which was recently obtained by Teplinsky and Khanin, is sharp. The constructed smooth examples can have Diophantine rotation numbers.